

# ANALOGÍA DEL CONCEPTO DE CURVATURA EN DIFERENTES ESPACIOS GEOMÉTRICOS

**JORGE IVÁN RAMÍREZ MONTOYA**

Código 9817888

Maestría en Enseñanza de las Matemáticas

Trabajo para optar al título de Magíster en Enseñanza de las Matemáticas

Asesor

Ph.D Carlos Arturo Escudero Salcedo

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE PEREIRA

FACULTAD DE CIENCIAS BÁSICAS

MAESTRÍA EN ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS PEREIRA RISARALDA

SEPTIEMBRE 2014



ANALOGÍA DEL CONCEPTO DE CURVATURA EN DIFERENTES  
ESPACIOS GEOMÉTRICOS

**JORGE IVÁN RAMÍREZ MONTOYA**

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE PEREIRA  
FACULTAD DE CIENCIAS BÁSICAS  
MAESTRÍA EN ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS PEREIRA RISARALDA  
SEPTIEMBRE 2014



### *AGRADECIMIENTOS*

Agradezco a todas las personas que han aportado su granito de arena para llevar a feliz término esta tesis de Maestría, en especial al profesor Carlos Arturo Escudero Salcedo (ph.D) por su acompañamiento y disposición en el desarrollo y construcción de esta tesis, a la Maestría y su dirección por brindarme toda la colaboración para culminar con éxito este trabajo. A toda mi familia, especialmente a mis padres, a todos los que de una u otra forma estuvieron ahí para motivarme y así, seguir adelante. Gracias



# Índice general

Índice general	VII
INTRODUCCIÓN	IX
<b>1. Preliminares</b>	<b>1</b>
1.1. Curvas . . . . .	1
1.1.1. Curva parametrizada . . . . .	2
1.1.2. curva regular . . . . .	4
1.1.3. longitud de arco de una curva en $\mathbb{R}^3$ . . . . .	4
1.2. Superficies regulares . . . . .	6
1.2.1. Orientación para una superficie regular . . . . .	10
1.2.2. Plano tangente a una superficie regular . . . . .	11
1.2.3. Primera forma fundamental . . . . .	12
1.3. Geometría de la aplicación de Gauss . . . . .	17
1.3.1. Segunda forma fundamental . . . . .	23
1.4. Geometría intrínseca de superficies . . . . .	28
1.4.1. Símbolos de Christoffel . . . . .	28
1.4.2. Derivada covariante de un campo vectorial . . . . .	32
1.5. Variedad diferenciable . . . . .	35

1.5.1. Campos vectoriales . . . . .	39
1.5.2. Métrica riemanniana . . . . .	41
1.5.3. Conexiones . . . . .	42
<b>2. Curvatura de una curva plana versus curvatura gaussiana de una superficie</b>	<b>47</b>
2.1. Curvatura de una curva plana . . . . .	48
2.2. Curvatura gaussiana de una superficie regular . . . . .	51
2.3. Otra analogía entre la curvatura de una curva plana y la curvatura gaussiana de una superficie . . . . .	57
2.3.1. Indicatriz normal . . . . .	62
<b>3. Curvatura de una curva plana versus curvatura geodésica de una curva en una superficie</b>	<b>69</b>
3.1. Curvatura de una curva plana . . . . .	69
3.2. Curvatura geodésica de una curva en una superficie . . . . .	71
<b>4. Capítulo 4: Curvatura gaussiana de una superficie versus curvatura escalar en una variedad.</b>	<b>83</b>
4.1. Curvatura gaussiana de una superficie regular . . . . .	83
4.2. Curvatura en variedades . . . . .	86
4.2.1. Curvatura de Ricci y curvatura escalar . . . . .	90
<b>Conclusiones</b>	<b>97</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>99</b>



# INTRODUCCIÓN

La noción de curvatura se origina en una curva plana, con la idea geométrica de que se curve o no dicha curva. Por ejemplo, una curva plana que carezca de curvatura en todos sus puntos, es una línea recta, y una curva que tiene curvatura constante en todos sus puntos, es una circunferencia. La primera formalización de dicha noción aparece en el trabajo realizado por el Alemán Gottfried Leibniz, quien fue el primero en realizar una aproximación del concepto de curvatura relacionándola con la circunferencia oscultriz (circunferencia tangente en un punto  $p$  de la curva) llegando al siguiente resultado

$$\kappa(p) = 1/r(p),$$

donde  $r(p)$  es el radio de la circunferencia oscultriz.

Una segunda aproximación del concepto de curvatura fue introducida por el matemático Leonard Euler, quien inició el estudio sistemático de la geometría intrínseca de las curvas, en esta aproximación Euler define la curvatura de una curva como

$$k(p) = \lim_{q \rightarrow p} \frac{\Delta\theta(p, q)}{L(p, q)},$$

donde  $L(p, q)$  es la longitud de la curva entre los puntos  $p$  y  $q$ , la cual geoméricamente significa que la curvatura es la rapidez con que cambia el ángulo de una recta tangente en un punto  $p$  de la curva con respecto a una recta fija. De igual manera a Leonard Euler se le atribuye la primera aproximación del concepto de curvatura de una superficie en un punto  $p$ , determinando los extremos de las curvaturas normales en dicho punto. Luego, el matemático alemán Carl Friedrich Gauss realizó una segunda aproximación

de la curvatura de una superficie que es la que actualmente se utiliza, más tarde se hace una generalización de la curvatura gaussiana de una superficie, que corresponde a la curvatura escalar en una variedad diferenciable introducida por el matemático Riemman. Como se nota el concepto de curvatura se transforma a lo largo de la historia y como veremos en este trabajo se pierde la idea intuitiva original de dicho concepto.

La curvatura de un «cuerpo geométrico», como su nombre lo dice, es una idea muy clara, sencilla e intuitiva. Por ejemplo, se curva más una circunferencia que una recta, y se curva más una esfera que un plano. Entonces la pregunta natural que nos lleva a la elaboración de este trabajo es, ¿matemáticamente, por qué se pierde tanto la noción de curvatura de una curva plana relacionada con la curvatura de una superficie, la definición de curvatura de una curva plana comparada con la definición de curvatura geodésica de una curva en una superficie, y de igual manera, la definición de curvatura de una superficie relacionada con la curvatura escalar de una variedad?.

Se observa entonces que la noción de curvatura trasladada a otros espacios geométricos no es tan fácil de entender. Así, con este trabajo se quiere explicar de una manera clara y precisa la analogía del concepto de curvatura en diferentes espacios geométricos, permitiendo que el lector tenga una mejor comprensión de este concepto cuando se pasa de un espacio trivial a un espacio abstracto.

Los objetivos de este trabajo son:

- i. Analizar la relación que existe entre la curvatura de una curva plana y la curvatura gaussiana de una superficie.
- ii. Analizar la relación que existe entre la curvatura de una curva plana y la curvatura geodésica de una curva en una superficie.
- iii. Analizar la relación que existe entre la curvatura escalar en una variedad con la noción de curvatura gaussiana de una superficie.

Para alcanzar estos objetivos se ha distribuido este trabajo en cuatro capítulos:

En el capítulo uno se presenta los preliminares, en el cual se encuentran los conceptos fundamentales de la geometría diferencial de curvas, superficies y variedades que serán utilizados en el desarrollo de los demás capítulos. Además, se presentan algunos ejemplos que le servirán al lector para familiarizarse con dichos conceptos y la correspondiente notación.

En el capítulo dos se presenta la analogía que existe entre los conceptos de curvatura de una curva plana y la curvatura gaussiana de una superficie. Además se presenta otra forma de expresar la curvatura gaussiana de una superficie en términos los coeficientes de la primera y la segunda forma fundamental. Por otra parte se puede observar la analogía entre la aplicación de Gauss para superficies y la indicatriz normal de una curva plana.

En el capítulo tres se presenta la analogía entre la curvatura de una curva plana y la curvatura geodésica de una curva en una superficie.

Finalmente, en el capítulo cuatro se presenta la relación que existe entre la curvatura gaussiana de una superficie regular, la curvatura seccional de una variedad, la curvatura de Ricci y la curvatura escalar de una variedad, donde se considera una superficie regular  $S$  como una variedad diferenciable  $M$  de dimensión dos.

Para la elaboración de este documento se tienen como referencias principales las citadas en [4] y [9].



# Capítulo 1

## Preliminares

En este capítulo se presentan los conceptos básicos sobre curvas, superficies y variedades tales como curva parametrizada, longitud de arco de una curva, superficie regular, plano tangente a una superficie, primera forma fundamental, segunda forma fundamental, derivada covariante, variedad riemanniana y otros, los cuales serán empleados en el desarrollo de los próximos capítulos, además de la familiarización con la notación utilizada en este documento. Los conceptos de curva plana, superficie regular y variedad riemanniana son indispensables en este trabajo, ya que en estos espacios geométricos se revisará la analogía del concepto de curvatura.

### 1.1. Curvas

Se puede pensar en una curva  $C$  como la trayectoria que describe un punto (o partícula) cuando se mueve en el espacio. Si se considera las coordenadas cartesianas  $(x, y, z)$  en  $\mathbb{R}^3$ , las coordenadas de un punto  $p \in C$  expresadas en términos de un cierto parámetro arbitrario  $t \in I \subseteq \mathbb{R}$ , vienen dadas por

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t), t \in I.$$

Entonces, una curva  $C$  es el conjunto de puntos de  $\mathbb{R}^3$  con coordenadas  $(x(t), y(t), z(t))$ , con  $t \in I$ , donde cada componente paramétrica es continua. A la aplicación  $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  dada por  $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$ , se le denomina representación paramétrica de la curva  $C$ .

Para el estudio local de curvas se hace necesario que estas tengan ciertas características especiales, en las cuales pueda aplicarse los métodos del cálculo diferencial.

### 1.1.1. Curva parametrizada

Una curva parametrizada diferenciable es una aplicación diferenciable  $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  de un intervalo  $I = (a, b) \subseteq \mathbb{R}$  en  $\mathbb{R}^3$ .

La aplicación  $\alpha$  es diferenciable, significa que  $\alpha$  es una correspondencia que aplica a cada  $t \in I$  en un punto  $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$  de  $\mathbb{R}^3$ , de modo que las funciones  $x(t), y(t), z(t)$  son diferenciables. La variable  $t$  se le denomina parámetro de la curva  $\alpha$ . Al vector  $\alpha'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t)) \in \mathbb{R}^3$  se denomina vector tangente (o vector velocidad) de la curva  $\alpha$  en  $t$ .

**1.1.1 Definición.** Sea  $\alpha$  una curva parametrizada diferenciable,

$$\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2,$$

dada por la parametrización  $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ .

El vector velocidad de  $\alpha$  en  $t$ , está dado por

$$\alpha'(t) = (x'(t), y'(t))$$

y el vector tangente unitario viene dado por

$$T(t) = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|} = \frac{(x'(t), y'(t))}{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}}.$$

**1.1.2 Ejemplo.** un disco circular de radio 1 en el plano  $xy$  rueda sin deslizarse a lo largo del eje  $x$ . La figura que describe un punto de la circunferencia del disco se llama cicloide.

Obtégase una curva parametrizada  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  cuya gráfica sea la cicloide.

### Solución

Sea  $P(x, y)$  un punto de la circunferencia ubicado inicialmente en el origen. Cuando el disco rueda sin deslizarse a lo largo del semieje positivo  $x$ , avanza horizontalmente una longitud correspondiente al arco de circunferencia  $\widehat{P'Q} = s$  (ver figura 1.1), cuyo ángulo central con vértice en  $C$  lo tomaremos como parámetro  $t$ .

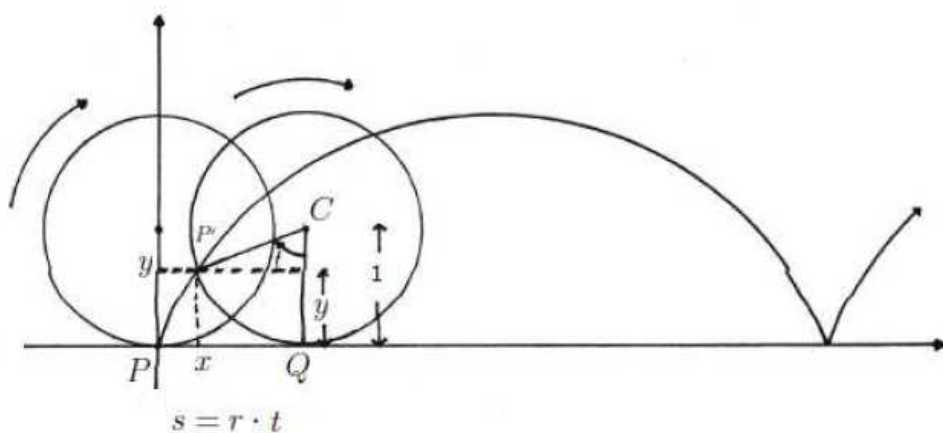


Figura 1.1: Cicloide

Así, la longitud del arco  $\widehat{P'Q} = \overline{PQ} = r \cdot \theta = 1 \cdot t = t$ , ya que el radio  $r$  de la circunferencia es 1 y  $\theta = t$ .

Las coordenadas de  $C$  y  $Q$  están dadas, respectivamente por

$$C = (t, 1) \text{ y } Q = (t, 0),$$

de esta manera, se obtiene que

$$x = t - \text{sen } t; \quad y = 1 - \cos t.$$

Luego, una parametrización para la cicloide es

$$\alpha(t) = (t - \operatorname{sen} t, 1 - \cos t).$$

### 1.1.2. curva regular

Sea  $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  una curva parametrizada diferenciable. Para cada  $t \in I$ , donde  $\alpha'(t) \neq 0$ , existe una recta bien definida que pasa por el punto  $\alpha(t)$  y contiene al vector  $\alpha'(t)$ . Esta recta se denomina recta tangente de  $\alpha$  en  $t$ . Para el estudio local de curvas es esencial la existencia de esta recta tangente a la curva. Nos interesa las curvas en las cuales  $\alpha'(t) \neq 0$ . Se denomina punto singular de  $\alpha$  a cualquier punto  $t$  donde  $\alpha'(t) = 0$ .

**1.1.3 Definición.** Sea  $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  una curva parametrizada diferenciable, se dice que  $\alpha$  es regular si  $\alpha'(t) \neq 0$  para todo  $t \in I$ .

### 1.1.3. longitud de arco de una curva en $\mathbb{R}^3$

Sea  $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  una curva parametrizada regular. La longitud de  $\alpha$  entre  $\alpha(a)$  y  $\alpha(b)$ , que se denota por  $L_a^b(\alpha) = L_\alpha(a, b)$ , se define como

$$L_\alpha(a, b) = \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt,$$

donde  $\|\alpha'(t)\| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}$  es la longitud del vector  $\alpha'(t)$ .

Si  $\alpha$  es una curva que cumple  $\|\alpha'(t)\| = 1$  para todo  $t$ , entonces la longitud de  $\alpha$  entre  $\alpha(a)$  y  $\alpha(b)$  es

$$L_a(b) = b - a.$$

En este caso se dice que la curva está parametrizada por el parámetro longitud de arco. La función longitud de arco se define como

$$s_\alpha(t) = \int_a^t \|\alpha'(u)\| du, \text{ donde } s \text{ es el parámetro longitud de arco.}$$



**1.1.4 Ejemplo.** El vector posición de una partícula que se mueve en una curva  $C$  tiene la siguiente parametrización regular

$$\alpha(t) = (\cos t + t \operatorname{sen} t, \operatorname{sen} t - t \cos t); \quad t \geq 0.$$

- a) Verifique que la rapidez  $\frac{ds}{dt} = t$ .
- b) Parametrice la curva  $C$  por la longitud de arco.

**Solución**

- a) Como  $\alpha'(t) \neq 0$ , entonces la longitud de arco  $s$  es una función diferenciable y  $\frac{ds}{dt} = \|\alpha'(t)\|$ .  
Así,

$$\alpha'(t) = (-\operatorname{sen} t + \operatorname{sen} t + t \cos t, \cos t - \cos t + t \operatorname{sen} t)$$

$$\alpha'(t) = (t \cos t, t \operatorname{sen} t),$$

luego

$$\begin{aligned} \|\alpha'(t)\| &= \sqrt{(t \cos t)^2 + (t \operatorname{sen} t)^2} \\ &= \sqrt{t^2 \cos^2 t + t^2 \operatorname{sen}^2 t} \\ &= \sqrt{t^2 (\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t)} \\ &= \sqrt{t^2}. \end{aligned}$$

Como  $t \geq 0$ , entonces

$$\|\alpha'(t)\| = t.$$

Finalmente,  $\frac{ds}{dt} = \|\alpha'(t)\| = t$ .

- b) Como  $\|\alpha'(t)\| = t$ , entonces la curva  $C$  no está parametrizada por el parámetro longitud de arco.

Ahora, parametricemos por longitud de arco la curva  $C$ .

$$\begin{aligned} s(t) &= \int_0^t \|\alpha'(u)\| du \\ &= \int_0^t u du = \frac{u^2}{2} \Big|_0^t = \frac{t^2}{2}. \end{aligned}$$

Así,  $s = \frac{t^2}{2}$ , de donde  $t = \sqrt{2s}$ ;  $t \geq 0$ .

Luego

$$\alpha(s) = (\cos \sqrt{2s} + \sqrt{2s} \sin \sqrt{2s}, \sin \sqrt{2s} - \sqrt{2s} \cos \sqrt{2s}); \quad s \geq 0,$$

es la parametrización de la curva  $C$  por el parámetro longitud de arco.

## 1.2. Superficies regulares

En términos generales, una superficie regular en  $\mathbb{R}^3$  se obtiene tomando trozos de un plano, deformándolos y disponiéndolos de forma que la figura resultante sea suave; es decir, que carezca de puntos abruptos, puntas, aristas o autointersecciones. Esto permite que en el entorno de cada punto  $p$  de la figura se pueda definir un plano tangente a la superficie. Es importante que el entorno de cada punto de la superficie se acerque lo suficiente a un plano, para que sobre él se pueda extender las nociones del cálculo diferencial (ver [1], [8]).

**1.2.1 Definición.** Sea  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  un conjunto abierto y  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  un campo escalar. Se dice que  $f$  es diferenciable en  $v \in U$  si  $f$  tiene derivadas parciales continuas de todos los órdenes en  $v$ . Si  $f$  es diferenciable en todo  $v$  de  $U$  se dice que  $f$  es diferenciable en  $U$ .

### Observación

\* Denotaremos la derivada parcial de  $f$  con respecto a  $x_i$  como  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$  o  $f_{x_i}$ .

Veamos ahora, como se extiende el concepto de diferenciación a un campo vectorial.

**1.2.2 Definición.** Sea  $F : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  una aplicación diferenciable. A cada punto  $p \in U$  asociamos una aplicación lineal  $dF_p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  que se denomina la diferencial de  $F$  en  $p$  y se define como sigue. Sea  $w \in \mathbb{R}^n$  y sea  $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow U$  una curva diferenciable tal que  $\alpha(0) = p$ ,  $\alpha'(0) = w$ . Por la regla de la cadena, la curva  $\beta = F \circ \alpha$  es también diferenciable. Entonces,

$$dF_p(w) = \beta'(0).$$

### Observación

- \* La  $dF_p$  no depende de la elección de la curva que pasa por  $p$  con vector tangente  $w$  (ver demostración en [4]).
- \* En particular, cuando  $F$  es un campo escalar  $dF_p = \nabla F(p)$ , donde  $\nabla F(p)$  es el gradiente de  $F$  en  $p$ .

**1.2.3 Definición.** Un subconjunto  $S \subset \mathbb{R}^3$  es una superficie regular si, para cada  $p \in S$ , existe un entorno  $V$  en  $\mathbb{R}^3$  y una aplicación  $x : U \rightarrow V \cap S$  de un subconjunto  $U$  de  $\mathbb{R}^2$  sobre  $V \cap S \subset \mathbb{R}^3$  tal que:

- i)  $x$  es diferenciable. Esto significa que si se escribe  $x(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$  (ver figura 1.2),  $(u, v) \in U$ , las funciones  $(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$  tienen derivadas parciales continuas de todos los órdenes en  $U$ .
- ii)  $x$  es un homeomorfismo. Como  $x$  es continua por la condición (i), esto significa que  $x$  admite una inversa  $x^{-1} : V \cap S \rightarrow U$  que es continua; es decir,  $x^{-1}$  es la restricción de una función continua  $F : W \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida sobre un conjunto abierto  $W$  que contiene  $V \cap S$ .
- iii) Condición de regularidad. Para cada  $q \in U$ , la diferencial  $dx_p : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  es inyectiva, es decir, el vector  $x_u \wedge x_v \neq \vec{0}$  para todo  $q$  de  $U$ .

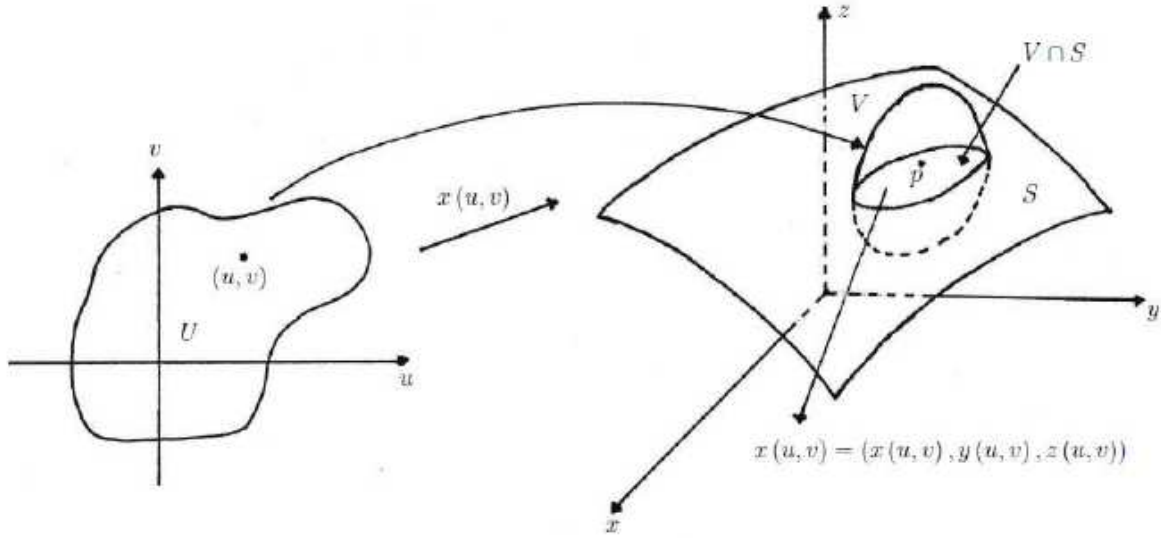


Figura 1.2: Parametrización de una superficie regular

La tercera condición de una superficie regular, condición de regularidad, se puede interpretar de la siguiente manera

$$x : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow S \subseteq \mathbb{R}^3$$

$$(u, v) \longrightarrow x(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)).$$

Sea  $q = (u_0, v_0) \in U$ . El vector  $e_1 = (1, 0)$ , es tangente a la curva  $u \rightarrow (u, v_0)$ , donde la imagen de  $(u, v_0)$  a través de  $x$  es la curva

$$u \rightarrow x(u, v_0) = (x(u, v_0), y(u, v_0), z(u, v_0)).$$

Esta curva imagen es denominada curva coordenada, en la cual  $v = v_0$  está contenida en  $S$  y tiene en  $x(q)$  el vector tangente  $dx_q(e_1)$ , dado por (ver figura 1.3)

$$dx_q(e_1) = \frac{\partial x}{\partial u} = \left( \frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u} \right) = x_u.$$

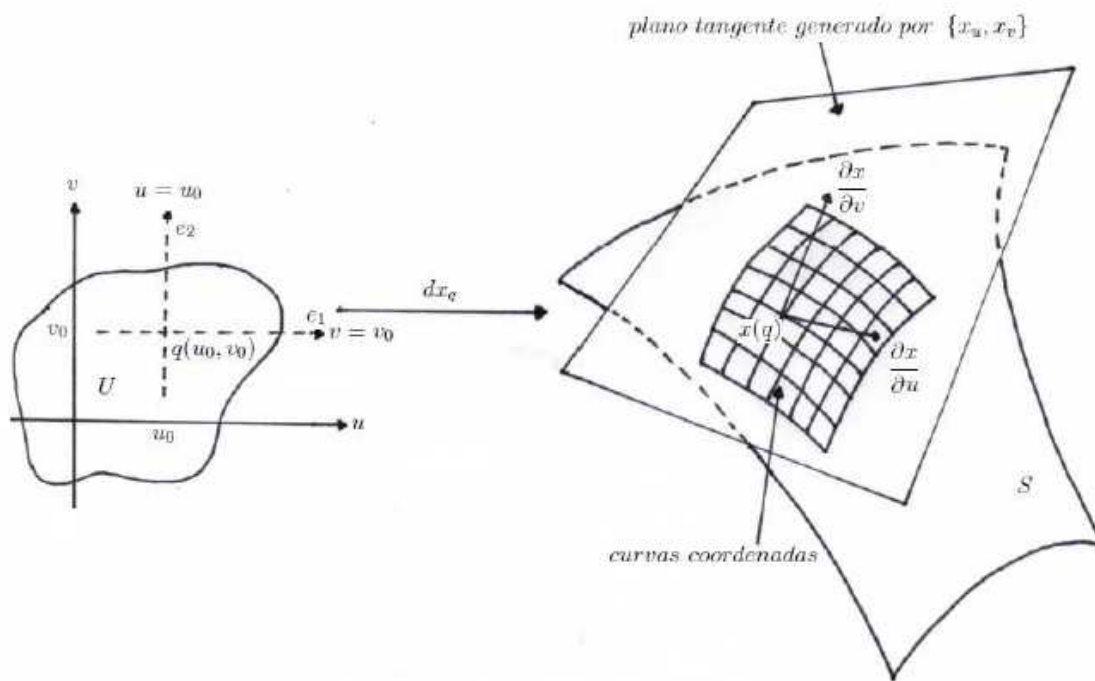


Figura 1.3: Curvas coordenadas

Se llama curva coordenada a cada una de las curvas sobre la superficie que resultan al considerar uno de los parámetros constante.

De igual manera, tomando  $u_0 = \text{cte}$ , se obtiene otra curva coordenada  $x(u_0, v)$ , para la cual el vector tangente en  $x(q) \in S$  es

$$dx_q(e_2) = \frac{\partial x}{\partial v} = \left( \frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v} \right) = x_v.$$

Así, la matriz de aplicación de  $dx_q$  está dada por

$$dx_q : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(u, v) \longrightarrow dx_q = \begin{pmatrix} \nabla x \\ \nabla y \\ \nabla z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix}.$$

Los vectores  $x_u = (\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u})$  y  $x_v = (\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v})$  deben ser linealmente independientes

o en forma equivalente

$$x_u \wedge x_v \neq 0,$$

o también, uno de los menores de orden dos de la matriz de  $dx_q$ , es decir, uno de los determinantes jacobianos

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0; \quad \frac{\partial(x, z)}{\partial(u, v)} \neq 0; \quad \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} \neq 0.$$

### 1.2.1. Orientación para una superficie regular

Dada una parametrización  $x : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$  de una superficie regular  $S$  en un punto  $p \in S$ , se puede elegir un vector normal unitario en cada punto  $q \in x(U)$ , mediante la expresión

$$N_{(q)} = \frac{x_u \wedge x_v}{\|x_u \wedge x_v\|}(q), \quad q \in x(U).$$

De esta manera se obtiene una aplicación  $N : x(U) \rightarrow \mathbb{R}^3$ , que asocia a cada  $q \in x(U)$  un vector normal unitario  $N(q)$ , que se define como

$$N_{(q)} = \frac{x_u \wedge x_v}{\|x_u \wedge x_v\|}(q), \quad q \in x(U).$$

De una forma más general, si  $V \subset S$  es un conjunto abierto en  $S$  y  $N : V \rightarrow \mathbb{R}^3$  es una aplicación diferenciable que asocia a cada  $q \in V$  un vector normal unitario en  $q$ , decimos que  $N$  es un campo diferenciable de vectores unitarios normales en  $V$ .

**1.2.4 Definición.** Diremos que una superficie regular es orientable si admite un campo diferenciable de vectores unitarios normales definido en la totalidad de la superficie; la elección de un campo  $N$  de ese tipo se denomina una orientación de  $S$ .

Si  $S$  es una superficie regular orientable, una orientación  $N$  en  $S$  induce una orientación sobre cada espacio tangente  $T_p(S)$ ,  $p \in S$ .

### 1.2.2. Plano tangente a una superficie regular

Dada una curva  $\alpha$  parametrizada diferenciable  $\alpha : I = (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Se denomina vector tangente  $v$  (o vector velocidad) de la curva  $\alpha$  en  $t$ , al vector  $\alpha'(t) = (x(t), y'(t), z'(t)) \in \mathbb{R}^3$  con  $\alpha(0) = p$  y  $\alpha'(0) = v$ .

Así como en una curva parametrizada se puede definir un vector tangente, para una superficie regular  $S$  se puede definir un plano tangente en un punto  $p \in S$ , que contiene al conjunto de todos los vectores tangentes a las curvas parametrizadas en  $S$  que pasan por  $p$ .

**1.2.5 Definición.** : Sean  $S$  una superficie regular y  $\alpha : I = (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow S \subseteq \mathbb{R}^3$  una curva parametrizada diferenciable tal que  $\alpha(0) = p$  y  $\alpha'(0) = v$ , donde  $v$  es un vector tangente a  $S$  en el punto  $p$ . Se define el plano tangente de  $S$  en  $p$  como (ver figura 1.4)

$$T_p S = \{v \in \mathbb{R}^3 / v \text{ es un vector tangente de } S \text{ en } p\}.$$

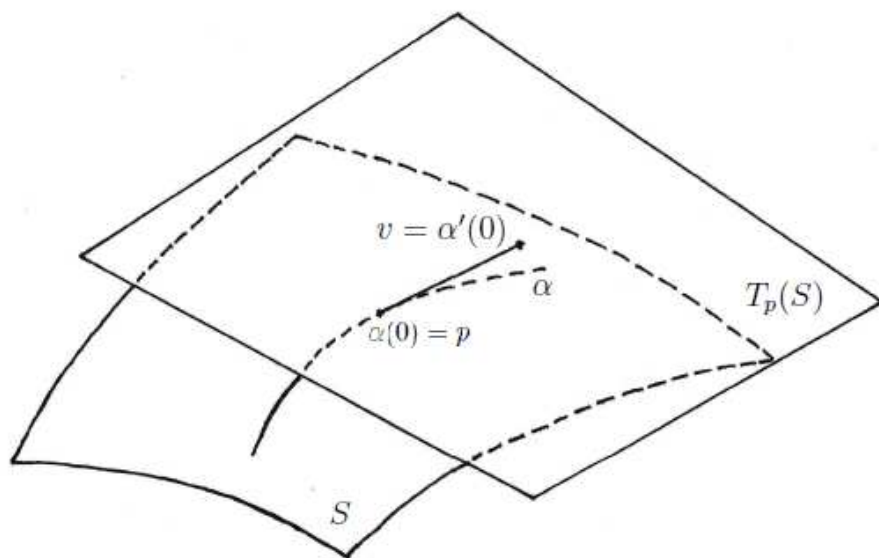


Figura 1.4: Plano tangente a una superficie

**1.2.6 Teorema.** Sea  $S$  una superficie regular y  $x : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  una parametrización de  $S$ . Supongamos  $x(q) = p$ ,  $q \in U$ . Entonces,  $T_p(S) = dx_q(\mathbb{R}^2)$ , además,  $T_p(S)$  es un espacio vectorial sobre  $\mathbb{R}$  de dimensión dos y  $\{x_u(q), x_v(q)\}$  es una base  $((u, v) \in U, x(u, v) \in S)$ .

### 1.2.3. Primera forma fundamental

Como  $T_p(S)$  es un espacio vectorial de dimensión dos, se puede definir en  $T_p(S)$  un producto interior. El producto interior natural de  $\mathbb{R}^3 \supset S$  induce en cada plano tangente  $T_p(S)$  de una superficie regular  $S$  un producto interior, que se denota  $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ .

Si  $w_1$  y  $w_2 \in T_p(S) \subset \mathbb{R}^3$ , entonces  $\langle w_1, w_2 \rangle_p$  es igual al producto interior de  $w_1$  y  $w_2$  como vectores de  $\mathbb{R}^3$ .

La primera forma fundamental corresponde a la forma cuadrática

$$I_p : T_p(S) \rightarrow \mathbb{R},$$

dada por

$$I_p(w) = \langle w, w \rangle_p = |w|^2 \geq 0.$$

**Observación:** el producto interior es simétrico y bilineal; es decir,  $\langle w_1, w_2 \rangle_p = \langle w_2, w_1 \rangle_p$  y lineal en cada variable.

**1.2.7 Definición.** Sea  $S$  una superficie regular, se define la primera forma fundamental de la superficie regular  $S \subset \mathbb{R}^3$  en  $p \in S$  como

$$I_p : T_p(S) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$w \rightarrow I_p(w) = \langle w, w \rangle_p,$$

donde  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  es el producto interno de  $\mathbb{R}^3$ .

La primera forma fundamental expresa como la superficie hereda el producto interior natural de  $\mathbb{R}^3$ . Geométricamente, permite hacer mediciones sobre la superficie como



longitud de una curva, ángulo de vectores tangentes, áreas de regiones.

Halleemos ahora, los coeficientes de la primera forma fundamental.

Expresemos la primera forma fundamental en términos de la base  $\{x_u, x_v\}$  asociada a la parametrización  $x(u, v)$  en  $p \in S$ .

Tomando la parametrización  $\alpha(t) = x(u(t), v(t))$ ,  $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ , con  $p = \alpha(0) = x(u(0), v(0))$ , y con un vector tangente  $w \in T_p(S)$ , dado por  $w = \alpha'(t)$ ,  $t = 0$ .

Por la regla de la cadena

$$\begin{aligned}\alpha'(t) &= \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial t} \\ \alpha'(t) &= x_u(u(t), v(t)) u'(t) + x_v(u(t), v(t)) v'(t) \\ \alpha'(0) &= x_u(u(0), v(0)) u'(0) + x_v(u(0), v(0)) v'(0).\end{aligned}$$

Por comodidad, se escribirá en adelante como

$$\alpha'(0) = x_u u' + x_v v'.$$

Aplicando la definición de la primera forma fundamental, se obtiene

$$\begin{aligned}I_p(\alpha'(0)) &= \langle w, w \rangle_p \\ &= \langle \alpha'(0), \alpha'(0) \rangle_p \\ &= \langle x_u u' + x_v v', x_u u' + x_v v' \rangle_p \\ &= \langle x_u, x_u \rangle_p (u')^2 + 2 \langle x_u, x_v \rangle_p u' v' + \langle x_v, x_v \rangle_p (v')^2 \\ I_p(\alpha'(0)) &= E(u')^2 + 2F u' v' + G(v')^2.\end{aligned}$$

Así, los coeficientes de la primera forma fundamental en la base  $\{x_u, x_v\}$  de  $T_p(S)$  son

$$E(u(0), v(0)) = \langle x_u, x_u \rangle_p,$$

$$F(u(0), v(0)) = \langle x_u, x_v \rangle_p,$$

$$G(u(0), v(0)) = \langle x_v, x_v \rangle_p.$$

**1.2.8 Ejemplo.** Considere la superficie parametrizada (superficie de Enneper)

$$x(u, v) = \left( u - \frac{u^3}{3} + uv^2, v - \frac{v^3}{3} + vu^2, u^2 - v^2 \right)$$

y demuestre que los coeficientes de la primera forma fundamental son:

$$E = G = (1 + u^2 + v^2)^2, F = 0$$

**Solución**

Calculemos  $x_u, x_v$

$$x_u = (1 - u^2 + v^2, 2uv, 2u),$$

$$x_v = (2uv, 1 - v^2 + u^2, -2v).$$

Luego, hallamos los coeficientes de la primera forma fundamental

$$\begin{aligned} E(u, v) &= \langle x_u, x_u \rangle \\ &= \langle (1 - u^2 + v^2, 2uv, 2u), (1 - u^2 + v^2, 2uv, 2u) \rangle \\ &= (1 - u^2 + v^2)^2 + (2uv)^2 + (2u)^2 \\ &= 1 + u^4 + v^4 - 2u^2 + 2v^2 - 2u^2v^2 + 4u^2v^2 + 4u^4 \\ &= 1 + u^4 + v^4 + 2u^2 + 2v^2 + 2u^2v^2 \\ E(u, v) &= (1 + u^2 + v^2)^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F(u, v) &= \langle x_u, x_v \rangle \\ &= \langle (1 - u^2 + v^2, 2uv, 2u), (2uv, 1 - v^2 + u^2, -2v) \rangle \\ &= 2uv - 2u^3v + 2u^3v + 2uv - 2uv^2 + 2u^3v - 4uv \\ F(u, v) &= 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G(u, v) &= \langle x_u, x_v \rangle \\
&= \langle (2uv, 1 - v^2 + u^2, -2v), (2uv, 1 - v^2 + u^2, -2v) \rangle \\
&= (2uv)^2 + (1 - v^2 + u^2)^2 + (2v)^2 \\
&= 4u^4v^4 + 1 + v^4 + u^4 - 2v^2 + 2u^2 - 2u^2v^2 + 4v^2 \\
&= 1 + u^4 + v^4 + 2u^2 + 2v^2 + 2u^2v^2 \\
G(u, v) &= (1 + u^2 + v^2)^2.
\end{aligned}$$

**1.2.9 Ejemplo.** Calcular la primera forma fundamental de una esfera en un punto del entorno coordinado asociado a la parametrización  $x(\theta, \phi) = (\text{sen}\theta \cos \phi, \text{sen}\theta \text{sen}\phi, \cos \theta)$ .

### Solución

Calculemos  $x_\theta, x_\phi$ .

$$x_\theta = (\cos \theta \cos \phi, \cos \theta \text{sen}\phi, -\text{sen}\theta),$$

$$x_\phi = (-\text{sen}\theta \text{sen}\phi, \text{sen}\theta \cos \phi, 0).$$

Luego, hallamos los coeficientes de la primera forma fundamental

$$\begin{aligned}
E(\theta, \phi) &= \langle x_\theta, x_\theta \rangle \\
&= \langle (\cos \theta \cos \phi, \cos \theta \text{sen}\phi, -\text{sen}\theta), (\cos \theta \cos \phi, \cos \theta \text{sen}\phi, -\text{sen}\theta) \rangle \\
&= \cos^2 \theta \cos^2 \phi + \cos^2 \theta \text{sen}^2 \phi + \text{sen}^2 \theta \\
&= \cos^2 \theta (\cos^2 \phi + \text{sen}^2 \phi) + \text{sen}^2 \theta \\
&= \cos^2 \theta + \text{sen}^2 \theta \\
E(\theta, \phi) &= 1.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F(\theta, \phi) &= \langle x_\theta, x_\phi \rangle \\
&= \langle (\cos \theta \cos \phi, \cos \theta \text{sen}\phi, -\text{sen}\theta), (-\text{sen}\theta \text{sen}\phi, \text{sen}\theta \cos \phi, 0) \rangle \\
&= -\text{sen}\theta \text{sen}\phi \cos \theta \cos \phi + \text{sen}\theta \text{sen}\phi \cos \theta \cos \phi \\
F(\theta, \phi) &= 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G(\theta, \phi) &= \langle x_\phi, x_\phi \rangle \\
&= \langle (-\operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi, \operatorname{sen}\theta \cos\phi, 0), (-\operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi, \operatorname{sen}\theta \cos\phi, 0) \rangle \\
&= \operatorname{sen}^2\theta \operatorname{sen}^2\phi + \operatorname{sen}^2\theta \cos^2\phi \\
&= \operatorname{sen}^2\theta (\operatorname{sen}^2\phi + \cos^2\phi) \\
G(\theta, \phi) &= \operatorname{sen}^2\theta.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, si  $w$  es un vector tangente a la esfera en el punto  $x(\theta, \phi)$ , expresado en la base asociada a  $x(\theta, \phi)$  por  $w = ax_\theta + bx_\phi$ ,  $a = u'$ ;  $b = v'$

$$\begin{aligned}
|w|^2 &= I(w) = Ea^2 + 2Fab + Gb^2 \\
&= a^2 + b^2 \operatorname{sen}^2\theta.
\end{aligned}$$

Uno de los aspectos importantes de la primera forma fundamental  $I_p$ , es el poder realizar mediciones sobre la superficie regular. Se presenta a continuación las fórmulas que permiten calcular ciertas medidas importantes.

- **Longitud de arco:** La longitud de arco  $s$  de una curva parametrizada diferenciable  $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow S$  viene dada por

$$\begin{aligned}
s(t) &= \int_0^t \|\alpha'(t)\| dt \\
&= \int_0^t \langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle^{1/2} dt \\
s(t) &= \int_0^t \sqrt{I(\alpha'(t))} dt.
\end{aligned}$$

- **Ángulo entre dos curvas parametrizadas:** Dadas  $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow S$ ,  $\beta : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow S$  dos curvas parametrizadas diferenciables que se cortan en  $t = t_0$ . El ángulo  $\theta$  que forman los vectores tangentes a dichas curvas en  $t = t_0$  está dado por

$$\cos \theta = \frac{\langle \alpha'(t_0), \beta'(t_0) \rangle}{\|\alpha'(t_0)\| \|\beta'(t_0)\|}.$$

- **Área de una región:** Sea  $R \subset S$  una región acotada de una superficie regular contenida en el entorno coordenado de una parametrización  $x : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow S$ . El área de la región  $R$  está dada por

$$A(R) = \int \int_Q \|x_u \wedge x_v\| \, dudv; \quad Q = x^{-1}(R).$$

Como

$$\begin{aligned} \|x_u \wedge x_v\|^2 &= \|x_u\|^2 \|x_v\|^2 \sin^2 \theta \\ \|x_u \wedge x_v\|^2 &= \|x_u\|^2 \|x_v\|^2 (1 - \cos^2 \theta) \\ \|x_u \wedge x_v\|^2 &= \|x_u\|^2 \|x_v\|^2 - \langle x_u, x_v \rangle^2 \\ \|x_u \wedge x_v\| &= \sqrt{EG - F^2}. \end{aligned}$$

Entonces

$$A(R) = \int \int_Q \sqrt{EG - F^2} \, dudv; \quad Q = x^{-1}(R).$$

### 1.3. Geometría de la aplicación de Gauss

La característica principal de una superficie regular es que es lo suficientemente suave (no contiene picos, aristas o autointersecciones) de tal manera que se puede definir un plano tangente a la superficie en un determinado punto  $p$ . La aplicación de Gauss permite obtener una correspondencia entre un entorno  $U(p)$  de la superficie con un entorno  $N(U(p))$  en la esfera unidad. Esta aplicación aporta una herramienta clave en el concepto de curvatura de una superficie que resulta ser análoga al concepto de curvatura de una curva plana.

**1.3.1 Definición.** Sea  $S \subset \mathbb{R}^3$  una superficie con una orientación  $N$ . La aplicación  $N : S \rightarrow \mathbb{R}^3$  toma valores en la esfera unidad

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

La aplicación  $N : S \rightarrow S^2 \subset \mathbb{R}^3$  así definida, se denomina la aplicación de Gauss de  $S$  (ver figura 1.5).

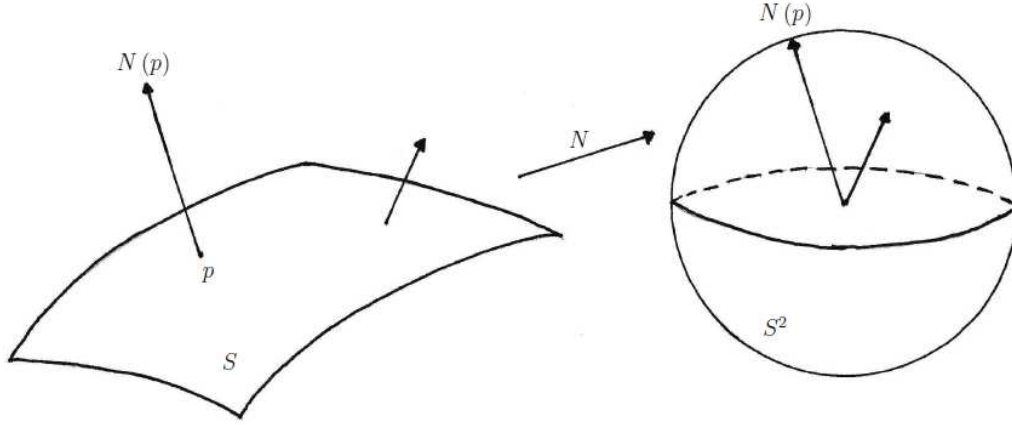


Figura 1.5: Aplicación de Gauss

La aplicación de Gauss es diferenciable. La diferencial  $dN_p : T_p(S) \rightarrow T_{N(p)}(S^2)$  es una aplicación lineal de  $T_p(S)$  en  $T_{N(p)}(S^2)$ . Como  $T_p(S)$  y  $T_{N(p)}(S^2)$  son planos paralelos,  $dN_p$  puede observarse como una aplicación lineal en  $T_p(S)$ .

La aplicación lineal  $dN_p : T_p(S) \rightarrow T_p(S)$  opera de la siguiente manera.

Para cada curva parametrizada  $\alpha(t)$  en  $S$  con  $\alpha(0) = p$ , consideramos la curva parametrizada  $N \circ \alpha(t) = N(t)$  en la esfera  $S^2$ ; esto equivale a restringir el vector normal  $N$  a la curva  $\alpha(t)$ . El vector tangente  $N'(0) = dN_p(\alpha'(0))$  es un vector de  $T_p(S)$ , mide la tasa de variación del vector normal  $N$ , restringido a la curva  $\alpha(t)$ , en  $t = 0$ .

Así,  $dN_p$  mide como  $N$  se aleja de  $N(p)$  en un entorno de  $p$ .

La diferencial de la aplicación de Gauss

$$dN_p : T_p(S) \rightarrow T_{N(p)}(S^2),$$

asigna a cada  $v \in T_p(S)$  un  $dN_p(v)$  en  $T_{N(p)}(S^2)$ , definido por

$$dN_p(v) = \frac{d}{dt}(N \circ \alpha)_{(t)}|_{t=0} = N'(0),$$

con  $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow S$ , donde  $\alpha(0) = p$  y  $\alpha'(0) = v$  (ver figura 1.6) ( $v$ , es el vector tangente a la curva en  $p$ ).

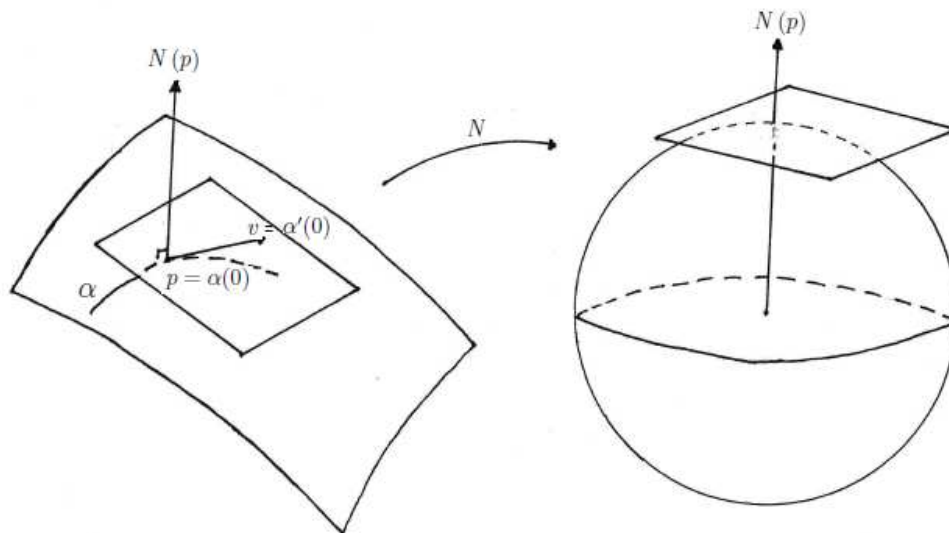


Figura 1.6: Diferencial de la aplicación Gauss

Precisemos y aclaremos con algunos ejemplos como opera la aplicación de Gauss  $N$  y su diferencial  $dN$ .

**1.3.2 Ejemplo.** En el caso de una curva contenida en un plano, geoméricamente se puede apreciar que los vectores normales a lo largo de la curva son paralelos, es decir, no cambian de dirección, permanecen constantes, por lo tanto  $dN_{(p)} = 0$  (ver figura 1.7).

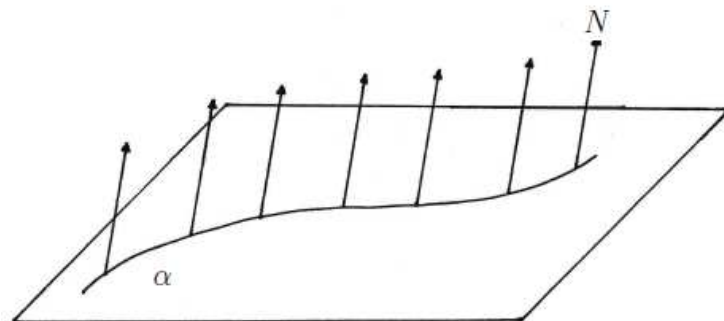


Figura 1.7: Diferencial de la aplicación de Gauss en el plano

Para un plano  $P$  dado por la ecuación  $ax + by + cz + d = 0$ , se tiene que el vector normal unitario es constante y se puede escribir como

$$N(p) = \frac{(a, b, c)}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, \quad \forall p \in P,$$

por lo tanto  $dN_{(p)} = 0$ .

**1.3.3 Ejemplo.** Para el caso de la esfera unidad

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 + z^2 = 1\},$$

se tiene, que para cada punto  $p \in S$ , el vector normal al plano tangente en  $p$  tiene la misma dirección del vector posición del punto  $p$ , es decir,  $N(p) = p$ . Así,  $N(x, y, z) = (x, y, z)$  o  $N(x, y, z) = (-x, -y, -z)$  (ver figura 1.8).

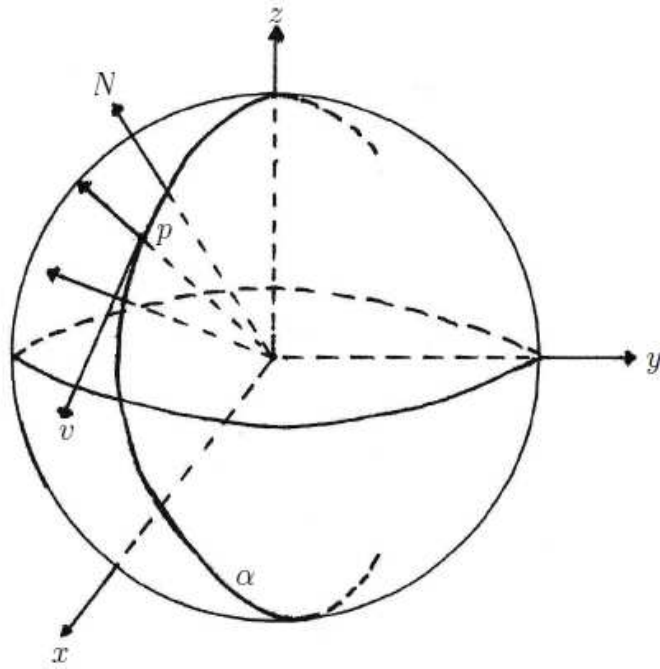


Figura 1.8: Diferencial de la aplicación de Gauss en la esfera



Como  $N(p) = p$  y  $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow S^2$ ,

donde  $\alpha(0) = p$ ;  $\alpha'(0) = v$ ;  $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$ ,

entonces

$$(N \circ \alpha)_{(t)} = N(\alpha(t)) = N(x(t), y(t), z(t)) = (x(t), y(t), z(t)).$$

Así,

$$\begin{aligned} dN_{(p)}(v) &= \frac{d}{dt} (N \circ \alpha)_{(t)} \big|_{t=0} \\ dN_{(p)}(v) &= \frac{d}{dt} (x(t), y(t), z(t)) \big|_{t=0} \\ dN_{(p)}(v) &= (x'(0), y'(0), z'(0)). \end{aligned}$$

Finalmente,

$$dN_{(p)}(v) = v = 1v.$$

Para una esfera de radio  $r$ , se tiene que el vector normal unitario está dado por

$$N(t) = \frac{(x(t), y(t), z(t))}{r},$$

luego,

$$dN(t) = N'(t) = \frac{1}{r} (x'(t), y'(t), z'(t)).$$

Evalutando en  $t = 0$

$$N'(0) = \frac{1}{r} (x'(0), y'(0), z'(0)),$$

se obtiene

$$N'(0) = \frac{1}{r} v.$$

Así,

$$dN(p) = \frac{1}{r} v$$

**1.3.4 Ejemplo.** Para el caso del cilindro

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 = 1, z \in \mathbb{R}\}.$$

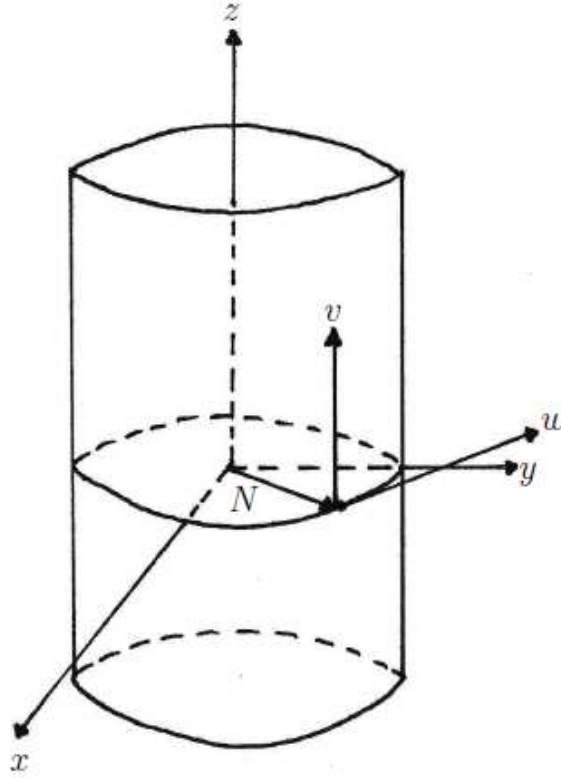


Figura 1.9: Diferencial de la aplicación de Gauss en el cilindro

Tomando como vector normal unitario  $N(p) = N(x, y, z) = (x, y, 0)$ ;

$$\|N\| = \sqrt{x^2 + y^2} = 1.$$

Como  $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow S^2$ , con  $\alpha(0) = p$ ,  $\alpha'(0) = v$  y  $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$ ,

entonces

$$(N \circ \alpha)(t) = N(\alpha(t)) = N(x(t), y(t), z(t)) = ((x(t), y(t), 0)),$$

luego

$$\begin{aligned} N'(t) &= \frac{d}{dt}(N \circ \alpha)(t)|_{t=0} \\ N'(t) &= \frac{d}{dt}(x(t), y(t), 0)|_{t=0} \\ N'(t) &= (x'(0), y'(0), 0). \end{aligned}$$

Así,

$$N'(t) = v; \quad v \in T_p C$$

### Observación

- i) Si  $v$  es tangente al cilindro y paralelo al eje  $z$ , entonces  $v = (0, 0, z'(t))$ . En este caso  $dN_{(p)}(v) = 0$
- ii) Si  $w$  es un vector tangente al cilindro y perpendicular al eje  $z$ , entonces  $w = (x'(0), y'(0), 0)$ . En este caso  $dN_{(p)}(w) = w$  (ver figura 1.9).

**1.3.5 Teorema.** La diferencial  $dN_p : T_p(S) \rightarrow T_p(S)$  de la aplicación de Gauss es una aplicación lineal autoadjunta. (ver demostración en [4])

### 1.3.1. Segunda forma fundamental

Como se vió en la orientación para superficies. Dada una parametrización  $x : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$  de una superficie regular  $S$  en un punto  $p \in S$ , se puede elegir un vector unitario normal en cada punto de  $x(U)$  mediante la expresión

$$N(q) = \frac{x_u \wedge x_v}{\|x_u \wedge x_v\|}, \quad q \in x(U).$$

De esta manera se obtiene una aplicación  $N : x(U) \rightarrow \mathbb{R}^3$  que asocia a cada  $q \in x(U)$  un vector normal unitario  $N(q)$ . Si  $V \subset S$  es un conjunto abierto en  $S$  y  $N : V \rightarrow \mathbb{R}^3$

es una aplicación diferenciable que asocia a cada  $q \in V$  un vector unitario normal en  $q$ , se dice que  $N$  es un campo diferenciable de vectores normales en  $V$ .

**1.3.6 Definición.** La forma cuadrática  $II_p$ , definida en  $T_p(S)$  por  $II_p(v) = -\langle dN_p(v), v \rangle$  se denomina la segunda forma fundamental de  $S$  en  $p$ .

Ahora, veamos como se puede escribir la segunda forma fundamental en un sistema coordenado, lo cual proporcionará un método sistemático para el cálculo de ejemplos específicos.

Se admite que todas las parametrizaciones  $x : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow S$  son compatibles en la orientación  $N$  de  $S$ ; es decir, en  $x(U)$

$$N = \frac{x_u \wedge x_v}{\|x_u \wedge x_v\|}, \quad q \in x(U).$$

Sea  $x(u, v)$  una parametrización en un punto  $p \in S$  de una superficie regular  $S$  y sea  $\alpha(t) = x(u(t), v(t))$  una curva parametrizada en  $S$ , con  $\alpha(0) = p$  y  $\alpha'(0) = w$ . Para simplificar la notación, se adopta la convención de que todas las funciones que se obtienen a continuación representan sus valores en el punto  $p$ .

El vector tangente a  $\alpha(t)$  en  $p$  es  $\alpha'(0) = w = x_u u' + x_v v'$ , y  $dN(\alpha') = N'(u(t), v(t)) = N_u u' + N_v v'$ , donde  $N_u = dN(x_u)$  y  $N_v = dN(x_v)$ .

Como  $N_u$  y  $N_v$  pertenecen al plano tangente  $T_p(S)$ , entonces se puede escribir

$$N_u = a_{11}x_u + a_{21}x_v,$$

$$N_v = a_{12}x_u + a_{22}x_v.$$

Ahora,

$$\begin{aligned} dN(\alpha') &= u'(t)N_u + v'(t)N_v \\ &= u'(a_{11}x_u + a_{21}x_v) + v'(a_{12}x_u + a_{22}x_v) \\ &= (a_{11}u' + a_{12}v')x_u + (a_{21}u' + a_{22}v')x_v, \end{aligned}$$

luego, las coordenadas de  $dN(\alpha')$  en la base  $\{x_u, x_v\}$  son

$$a_{11}u' + a_{12}v'$$

$$a_{21}u' + a_{22}v',$$

es decir,

$$dN(\alpha') = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}.$$

La expresión anterior muestra que en la base  $\{x_u, x_v\}$ ,  $dN$  viene expresada por la matriz  $(a_{ij})$ ,  $i, j = 1, 2$ . Ésta matriz no es necesariamente simétrica, salvo que  $\{x_u, x_v\}$  sea una base ortonormal.

Por otro lado, la expresión de la segunda forma fundamental en la base  $\{x_u, x_v\}$  se puede escribir como

$$\begin{aligned} II_p(\alpha') &= -\langle dN(\alpha'), \alpha' \rangle \\ &= -\langle N_u u' + N_v v', x_u u' + x_v v' \rangle \\ II_p(\alpha') &= -\langle N_u, x_u \rangle (u')^2 - \langle N_u, x_v \rangle u'v' - \langle N_v, x_u \rangle v'u' - \langle N_v, x_v \rangle (v')^2. \end{aligned}$$

Así,

$$II_p(\alpha') = e (u')^2 + 2f u'v' + g (v')^2,$$

$$\text{donde } \langle N, x_u \rangle = \langle N, x_v \rangle = 0.$$

Luego, los coeficientes de la segunda forma fundamental están dados por

$$\begin{aligned} e &= -\langle N_u, x_u \rangle = \langle N, x_{uu} \rangle, \\ f &= -\langle N_v, x_u \rangle = \langle N, x_{uv} \rangle = \langle N, x_{vu} \rangle = -\langle N_u, x_v \rangle, \\ g &= -\langle N_v, x_v \rangle = \langle N, x_{vv} \rangle. \end{aligned}$$

**1.3.7 Ejemplo.** Considere la superficie paramerizada (superficie de Enneper)

$$x(u, v) = \left( u - \frac{u^3}{3} + uv^2, v - \frac{v^3}{3} + vu^2, u^2 - v^2 \right)$$

y demuestre que los coeficientes de la segunda forma fundamental son

$$e = 2; \quad g = -2; \quad f = 0.$$

**Solución:**

Calculemos  $x_u$  y  $x_v$

$$\begin{aligned} x_u &= (1 - u^2 + v^2, 2uv, 2u), \\ x_v &= (2uv, 1 - v^2 + u^2, -2v). \end{aligned}$$

Ahora, calculemos  $x_{uu}$ ,  $x_{uv}$ ,  $x_{vv}$  y posteriormente a  $N$

$$\begin{aligned} x_{uu} &= (-2u, 2v, 2), \\ x_{uv} &= (2v, 2u, 0), \\ x_{vv} &= (2u, -2v, -2). \end{aligned}$$

$$N = \frac{x_u \wedge x_v}{\|x_u \wedge x_v\|} = \frac{\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 - u^2 + v^2 & 2uv & 2u \\ 2uv & 1 - v^2 + u^2 & -2v \end{vmatrix}}{\sqrt{EG - F^2}}$$

Anteriormente se obtuvo (ver ejemplo 1.2.7)  $E = (1 + u^2 + v^2)^2$ ,  $F = 0$ ,  $G = (1 + u^2 + v^2)^2$ .

Luego, resolviendo el determinante, se obtiene

$$N = \frac{(-2uv^2 - 2u - 2u^3, 2v + 2u^2v + 2v^3, 1 - 2u^2v^2 - u^4 - v^4)}{(1 + u^2 + v^2)^2}.$$

Finalmente, hallemos los coeficientes de la segunda forma fundamental

$$\begin{aligned} e &= \langle N, x_{uu} \rangle \\ &= \frac{1}{(1 + u^2 + v^2)^2} (4u^2v^2 + 4u^2 + 4u^4 + 4u^2v^2 + 4v^2 + 4v^4 + 2 - 4u^2v^2 - 2u^4 - 2v^4) \\ &= \frac{2}{(1 + u^2 + v^2)^2} (1 + u^2 + v^2)^2 \\ e &= 2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g &= \langle N, x_{vv} \rangle \\ &= \frac{-2}{(1 + u^2 + v^2)^2} (1 + u^2v^4 + 2u^2 + 2v^2 + 2u^2v^2) \\ &= \frac{-2}{(1 + u^2 + v^2)^2} (1 + u^2 + v^2)^2 \\ g &= -2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f &= \langle N, x_{uv} \rangle \\ &= \frac{1}{(1 + u^2 + v^2)^2} (-4uv^3 - 4uv - 4u^3v + 4uv + 4u^3v + 4uv^3) \\ f &= 0. \end{aligned}$$

Así,  $e = 2$ ,  $g = -2$ ,  $f = 0$ .

**1.3.8 Definición.** Sea una curva regular  $C \subset S$  parametrizada por  $\alpha(s)$ ; donde  $s$  es la longitud de arco de  $C$  con  $\alpha(0) = p$  y  $\alpha'(0) = v$ . Si se denota  $N(s)$  a la restricción del vector normal  $N$  a la curva  $\alpha(s)$ , con  $\langle N(s), \alpha'(s) \rangle = 0$ . Se define la curvatura normal de una curva regular que pasa por  $p$  y es tangente a  $v \in T_p(s)$  como  $k_n(p) = II(\alpha'(0))$ .

**1.3.9 Definición.** La curvatura normal máxima  $k_1$  y la curvatura normal mínima  $k_2$  se denominan las curvaturas principales de  $C \subset S$  en el punto  $p$ , donde  $k_2 \leq k_n \leq k_1$ ; las direcciones correspondientes, es decir, las direcciones dadas por los autovectores  $e_1, e_2$  se denominan las direcciones principales en  $p$ .

## 1.4. Geometría intrínseca de superficies

En esta sección se empieza introduciendo los símbolos de Christoffel para un punto  $p \in S$  y se presentan algunos conceptos importantes de la geometría local de una superficie como el de la derivada covariante de un campo vectorial, que es análoga a la diferenciación habitual de vectores en el plano. La derivada covariante de un campo vectorial se define como la proyección sobre el plano tangente de la derivada de dicho campo vectorial. Esta derivada covariante resulta ser fundamental ya que nos permite permanecer en el plano tangente a una superficie en un punto  $p$ .

### 1.4.1. Símbolos de Christoffel

Vamos a asignar un triedro a cada punto  $p$  de una superficie y a estudiar las derivadas de sus vectores. Sea  $x : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow S$  una parametrización en la orientación de  $S$ . A cada punto de  $x(U)$  se le puede asignar un triedro natural definido por los vectores  $x_u$ ,  $x_v$  y  $N$ .

Al expresar las derivadas de los vectores  $x_u$ ,  $x_v$  y  $N$  con respecto a la base  $\{x_u, x_v, N\}$ , se obtiene

$$\begin{aligned} x_{uu} &= \Gamma_{11}^1 x_u + \Gamma_{11}^2 x_v + L_1 N, \\ x_{uv} &= \Gamma_{12}^1 x_u + \Gamma_{12}^2 x_v + L_2 N, \\ x_{vu} &= \Gamma_{21}^1 x_u + \Gamma_{21}^2 x_v + \overline{L}_2 N, \\ x_{vv} &= \Gamma_{22}^1 x_u + \Gamma_{22}^2 x_v + L_3 N, \\ N_u &= a_{11} x_u + a_{21} x_v, \\ N_v &= a_{12} x_u + a_{22} x_v, \end{aligned}$$



donde los  $a_{ij}$ ,  $i, j = 1, 2$  se obtuvieron con anterioridad y los coeficientes  $\Gamma_{ij}^k$ ,  $i, j, k = 1, 2$  se denominan los símbolos de Christoffel de  $S$  en la parametrización  $x$ .

Como  $x_{uv} = x_{vu}$ , entonces  $\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1$  y  $\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2$ ; es decir, los símbolos de Christoffel son simétricos con respecto a los subíndices.

Efectuando el producto interior de las primeras cuatro relaciones con  $N$ , se obtiene

$$\begin{aligned}\langle x_{uu}, N \rangle &= \Gamma_{11}^1 \langle x_u, N \rangle + \Gamma_{11}^2 \langle x_v, N \rangle + L_1 \langle N, N \rangle \\ \langle x_{uu}, N \rangle &= L_1 = e,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle x_{uv}, N \rangle &= \Gamma_{12}^1 \langle x_u, N \rangle + \Gamma_{12}^2 \langle x_v, N \rangle + L_2 \langle N, N \rangle \\ \langle x_{uv}, N \rangle &= L_2 = f,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle x_{vu}, N \rangle &= \Gamma_{21}^1 \langle x_u, N \rangle + \Gamma_{21}^2 \langle x_v, N \rangle + \overline{L_2} \langle N, N \rangle \\ \langle x_{vu}, N \rangle &= \overline{L_2} = f.\end{aligned}$$

Como  $x_{uv} = x_{vu}$ , entonces  $\langle x_{uv}, N \rangle = \langle x_{vu}, N \rangle = L_2 = \overline{L_2} = f$ .

$$\begin{aligned}\langle x_{vv}, N \rangle &= \Gamma_{22}^1 \langle x_u, N \rangle + \Gamma_{22}^2 \langle x_v, N \rangle + L_3 \langle N, N \rangle \\ \langle x_{vv}, N \rangle &= L_3 = g,\end{aligned}$$

donde  $e, f, g$  son los coeficientes de la segunda forma fundamental de  $S$ .

Para determinar los símbolos de Christoffel, se efectúa el producto interno de las primeras cuatro relaciones  $x_{uu}$ ,  $x_{uv}$ ,  $x_{vu}$ ,  $x_{vv}$  con  $x_u$  y  $x_v$ . Así,

$$\begin{aligned}\langle x_{uu}, x_u \rangle &= \Gamma_{11}^1 \langle x_u, x_u \rangle + \Gamma_{11}^2 \langle x_v, x_u \rangle + L_1 \langle N, x_u \rangle \\ &= \Gamma_{11}^1 E + \Gamma_{11}^2 F.\end{aligned}$$

Ahora, veamos

$$\begin{aligned}\langle x_u, x_u \rangle_u &= \langle x_{uu}, x_u \rangle + \langle x_u, x_{uu} \rangle = 2 \langle x_{uu}, x_u \rangle \\ E_u &= 2 \langle x_{uu}, x_u \rangle \\ \frac{1}{2} E_u &= \langle x_{uu}, x_u \rangle.\end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}\langle x_{uu}, x_u \rangle &= \Gamma_{11}^1 E + \Gamma_{11}^2 F = \frac{1}{2} E_u \\ \langle x_{uu}, x_v \rangle &= \Gamma_{11}^1 \langle x_u, x_v \rangle + \Gamma_{11}^2 \langle x_v, x_v \rangle + L_1 \langle N, x_v \rangle \\ \langle x_{uu}, x_u \rangle &= \Gamma_{11}^1 F + \Gamma_{11}^2 G.\end{aligned}$$

De manera similar

$$\begin{aligned}\langle x_u, x_v \rangle_u &= \langle x_{uu}, x_v \rangle + \langle x_u, x_v u \rangle \\ F_u - \langle x_u, x_{vu} \rangle &= \langle x_{uu}, x_v \rangle,\end{aligned}$$

como

$$\begin{aligned}\langle x_u, x_u \rangle_v &= \langle x_{uv}, x_u \rangle + \langle x_u, x_{uv} \rangle, \text{ entonces} \\ E_v &= 2 \langle x_u, x_{uv} \rangle \\ \frac{1}{2} E_v &= \langle x_u, x_{uv} \rangle.\end{aligned}$$

Así,

$$F_u - \frac{1}{2} E_v = \langle x_{uu}, x_v \rangle,$$

luego

$$\langle x_{uu}, x_v \rangle \Gamma_{11}^1 F + \Gamma_{11}^2 G = F_u - \frac{1}{2} E_v.$$

Realizando un procedimiento como el anterior con las relaciones  $x_{uv}$  y  $x_{vv}$ , se obtienen las siguientes expresiones

$$\begin{aligned}\langle x_{uv}, x_u \rangle &= \Gamma_{12}^1 E + \Gamma_{12}^2 F = \frac{1}{2} E_v, \\ \langle x_{uv}, x_v \rangle &= \Gamma_{12}^1 F + \Gamma_{12}^2 G = \frac{1}{2} G_u, \\ \langle x_{vv}, x_u \rangle &= \Gamma_{22}^1 E + \Gamma_{22}^2 F = F_v - \frac{1}{2} G_u, \\ \langle x_{vv}, x_v \rangle &= \Gamma_{22}^1 F + \Gamma_{22}^2 G = \frac{1}{2} G_v.\end{aligned}$$

De lo anterior se obtiene los siguientes tres pares de ecuaciones

$$\begin{aligned}\Gamma_{11}^1 E + \Gamma_{11}^2 F &= \langle x_{uu}, x_u \rangle = \frac{1}{2} E_u, \\ \Gamma_{11}^1 F + \Gamma_{11}^2 G &= \langle x_{uu}, x_v \rangle = F_u - \frac{1}{2} E_v. \\ \Gamma_{12}^1 E + \Gamma_{12}^2 F &= \langle x_{uv}, x_u \rangle = \frac{1}{2} E_v, \\ \Gamma_{12}^1 F + \Gamma_{12}^2 G &= \langle x_{uv}, x_v \rangle = F_u - \frac{1}{2} G_u. \\ \Gamma_{22}^1 E + \Gamma_{22}^2 F &= \langle x_{vv}, x_u \rangle = F_v - \frac{1}{2} G_u, \\ \Gamma_{22}^1 F + \Gamma_{22}^2 G &= \langle x_{vv}, x_v \rangle = \frac{1}{2} G_v.\end{aligned}$$

En cada uno de los pares de ecuaciones anteriores, el determinante del sistema es  $EG - F^2 \neq 0$ . De esta forma, es posible resolver el sistema anterior y calcular los símbolos de Chirstoffel ( $\Gamma_{ij}^k, i, j, k = 1, 2$ ) en términos de los coeficientes de la primera forma fundamental y sus derivadas.

**1.4.1 Definición.** Un campo vectorial  $W$  en un conjunto abierto  $U \subset S$  de una superficie regular  $S$  es una correspondencia que asigna a cada  $p \in U$  un vector  $W(p) \in T_p(S)$ . El campo vectorial  $W$  es diferenciable en  $p \in U$  si, para alguna

parametrización  $x(u, v)$  en  $p$ , las funciones  $a(u, v)$  y  $b(u, v)$  dadas por

$$W(p) = a(u, v)x_u + b(u, v)x_v,$$

son funciones diferenciables en  $p$ .

### 1.4.2. Derivada covariante de un campo vectorial

Sea  $W$  un campo vectorial diferenciable en un conjunto abierto  $U \subset S$  y  $p \in U$ . Sea  $y \in Tp(S)$ . Consideremos una curva parametrizada  $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow U$ , con  $\alpha(0) = p$  y  $\alpha'(0) = y$  y sea  $W(t)$ ,  $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ , la restricción del campo vectorial  $W$  a la curva  $\alpha$ .

El campo vectorial que se obtiene proyectando ortogonalmente  $\left(\frac{dW}{dt}\right)(0)$  sobre el plano  $Tp(S)$  se denomina la derivada covariante en  $p$  del campo vectorial  $W$  con respecto al vector "y" (ver figura 1.10), la derivada covariante se denota por  $\left(\frac{DW}{dt}\right)(0)$  o por  $(D_y W)(p)$ .

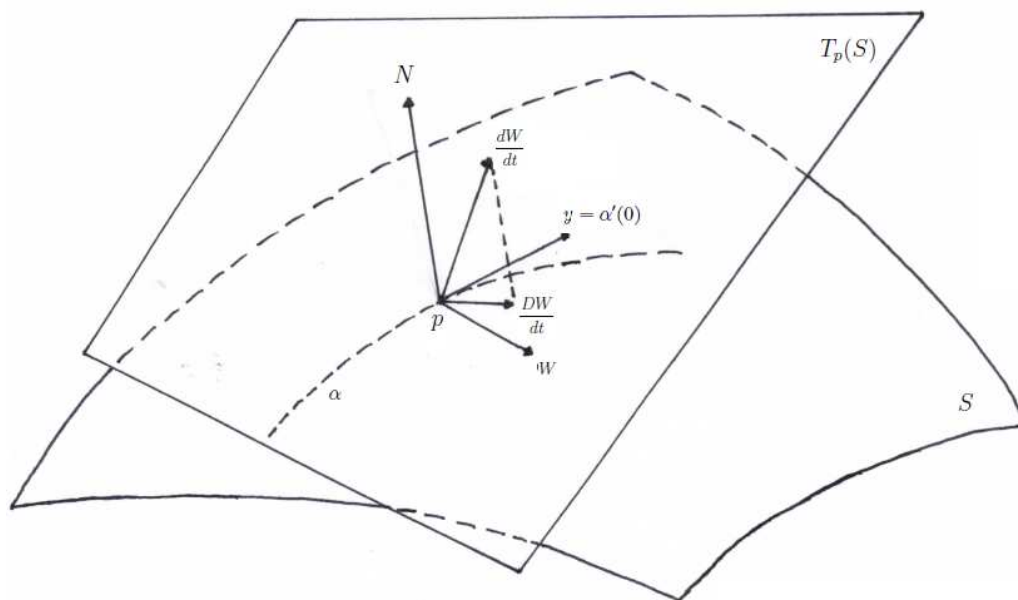


Figura 1.10: Derivada covariante de un campo vectorial

Veamos que la derivada covariante es un concepto de la geometría intrínseca, que no depende de la elección de la curva  $\alpha$ .

Para probar esta afirmación, obtengamos una expresión para  $\frac{DW}{dt}$  en términos de una parametrización  $x(u, v)$  de  $S$  en  $p$ . Sea  $x(u(t), v(t)) = \alpha(t)$  una parametrización para  $\alpha$  de  $S$  en  $p$  y sea  $W(t) = a(u(t), v(t))x_u + b(u(t), v(t))x_v$

$$W(t) = ax_u + bx_v \in Tp(S),$$

la expresión de  $W(t)$  en la parametrización  $x(u, v)$ . Entonces

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dt} &= a'x_u + a(x_{uu}u' + x_{uv}v') + b'x_v + b(x_{vu}u' + x_{vv}v') \\ &= a'x_u + b'x_v + a(u'x_{uu} + v'x_{uv}) + b(x_{vu}u' + x_{vv}v'). \end{aligned}$$

Luego,  $\frac{dW}{dt}$  se puede expresar en términos de los símbolos de Christoffel, ya que  $x_{uu}$ ,  $x_{vv}$  y  $x_{uv}$  se pueden escribir así

$$x_{uu} = \Gamma'_{11}x_u + \Gamma_{11}^2x_v + L_1N,$$

$$x_{uv} = \Gamma'_{12}x_u + \Gamma_{12}^2x_v + L_2N,$$

$$x_{vv} = \Gamma'_{22}x_u + \Gamma_{22}^2x_v + L_3N.$$

Como  $\frac{dW}{dt}$  es la proyección de  $\frac{dW}{dt}$  sobre el plano tangente, entonces se expresa  $x_{uu}$ ,  $x_{vv}$  y  $x_{uv}$  en términos de las componentess  $x_u$  y  $x_v$ . Así,

$$x_{uu} = \Gamma'_{11}x_u + \Gamma_{11}^2x_v,$$

$$x_{uv} = \Gamma'_{12}x_u + \Gamma_{12}^2x_v,$$

$$x_{vv} = \Gamma'_{22}x_u + \Gamma_{22}^2x_v.$$

De esta manera,  $\frac{DW}{dt}$  está dada por

$$\begin{aligned} \frac{DW}{dt} &= a'x_u + b'x_v + a(\Gamma'_{11}x_uu' + \Gamma_{11}^2x_vu' + \Gamma'_{12}x_uv' + \Gamma_{12}^2x_vv') + b(u'\Gamma'_{12}x_u + v'\Gamma_{12}^2x_v) \\ &= (a' + \Gamma_{11}^2au' + \Gamma'_{12}av' + \Gamma'_{12}u' + \Gamma_{22}^2v')x_u + (b' + \Gamma_{11}^2au' + \Gamma_{12}^2av' + \Gamma_{12}^2bu' + \Gamma_{22}^2bv')x_v. \end{aligned}$$

La expresión anterior muestra que  $\frac{DW}{dt}$  sólo depende del vector  $(u', v') = y$ , no de la curva  $\alpha$ .

**1.4.2 Definición.** : Se dice que un campo vectorial  $W$ , a lo largo de una curva parametrizada  $\alpha : I \rightarrow S$ , es paralelo si  $\frac{DW}{dt} = 0$  para cada  $t \in I$ . En el plano si  $W(t)$  es paralelo, entonces tiene la misma longitud y el mismo ángulo respecto a una dirección fija (ver figura 1.11).

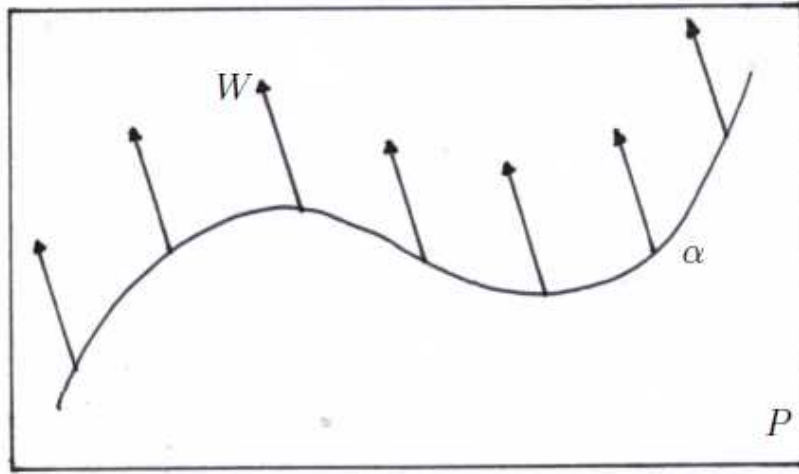


Figura 1.11: Campo vectorial paralelo

**1.4.3 Definición.** Se dice que una curva parametrizada no constante  $\gamma : I \rightarrow S$  es una geodésica en  $t \in I$  si el campo de sus vectores tangentes  $\gamma'(t)$  es paralelo a lo largo de  $\gamma$  en  $t$ ; es decir,

$$\frac{D\gamma'(t)}{dt} = 0.$$

Se dice que  $\gamma$  es una geodésica parametrizada si es geodésica para todo  $t \in I$ .

**1.4.4 Definición.** Se dice que una curva regular conexa  $C$  en  $S$  es una curva geodésica si, para cada  $p \in C$ , la parametrización  $\alpha(s)$  de un entorno coordenado de  $p$  por la longitud de arco  $s$  es una geodésica parametrizada; es decir,  $\alpha'(s)$  es un campo paralelo a lo largo de  $\alpha(s)$ .

**Observación:**

- i) Si  $\gamma$  es una geodésica entonces  $\|\gamma'(t)\| = cte = c \neq 0, \quad \forall t \in I$ ,  
entonces

$$s = \int_{t_0}^t \|\gamma'(t)\| dt = tc; \quad s = tc.$$

Obsérvese que la longitud de arco  $s$  de  $\gamma$  es directamente proporcional al parámetro  $t$ .

- ii) Si  $\gamma(s)$  es una geodésica parametrizada por la longitud de arco, entonces  $\gamma''(s) = kn$ , donde  $k$  es la curvatura ordinaria y  $n$  es vector normal a la curva, es decir,  $n = \frac{D\gamma'(s)}{ds}$ .

Como  $\gamma'(s)$  es un campo vectorial paralelo ( $\gamma$  es geodésica), entonces  $\gamma''(s) = \lambda N$ , ( $N$  es el vector normal a la superficie).

Luego  $N$  y  $n$  son paralelos. Así,

$\gamma$  es una geodésica si y sólo si  $n = \lambda N$ .

## 1.5. Variedad diferenciable

La geometría riemanniana surge en el desarrollo posterior de la geometría diferencial clásica. La principal aportación de Gauss para la geometría riemanniana consiste en que Gauss afirma que la geometría intrínseca de una superficie  $S$  depende única y exclusivamente de la primera forma fundamental. De donde se concluye que la geometría de una superficie puede considerarse independiente de la geometría del espacio euclídeo que contiene a la superficie, ya que aquella sólo requiere de la definición de un producto escalar para vectores tangentes a la superficie. Este descubrimiento de Gauss sugería que sería posible imaginar una geometría en dimensión dos que dependiera de una forma cuadrática fundamental dada en términos arbitrarios, sin que fuese herencia del espacio ambiente.

Riemann a mediados del siglo *XIX* retoma el legado de Gauss y desarrolla esta geometría abstracta, a pesar de que él no disponía de una definición adecuada de variedad. La noción de variedad diferenciable surge de la necesidad de tener una idea

abstracta de superficie (es decir, sin la participación del espacio ambiente,  $\mathbb{R}^3$ ), la cual permite extender los métodos del cálculo diferencial a espacios más generales que  $\mathbb{R}^n$ . Una variedad diferenciable es un conjunto que, localmente, es difeomorfo al espacio euclídeo.

**Definición:** Una variedad diferenciable de dimensión  $n$  es un conjunto  $M$  y una familia de aplicaciones inyectivas  $x_\alpha : U_\alpha \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow M$  de conjuntos abiertos  $U_\alpha$  de  $\mathbb{R}^n$  sobre  $M$  tal que:

- i)  $\bigcup_\alpha x_\alpha(U_\alpha) = M$
- ii) Si  $x_\alpha(U_\alpha) \cap x_\beta(U_\beta) = W \neq \emptyset$  para cualquier  $\alpha, \beta$ , entonces  $x_\alpha^{-1}(W)$  y  $x_\beta^{-1}(W)$  son conjuntos abiertos en  $\mathbb{R}^n$  y la aplicación  $x_\beta^{-1} \circ x_\alpha$  es diferenciable (ver figura 1.12).
- iii) La familia  $\{(U_\alpha, x_\alpha)\}$  es máxima relativa de las condiciones (i) y (ii).

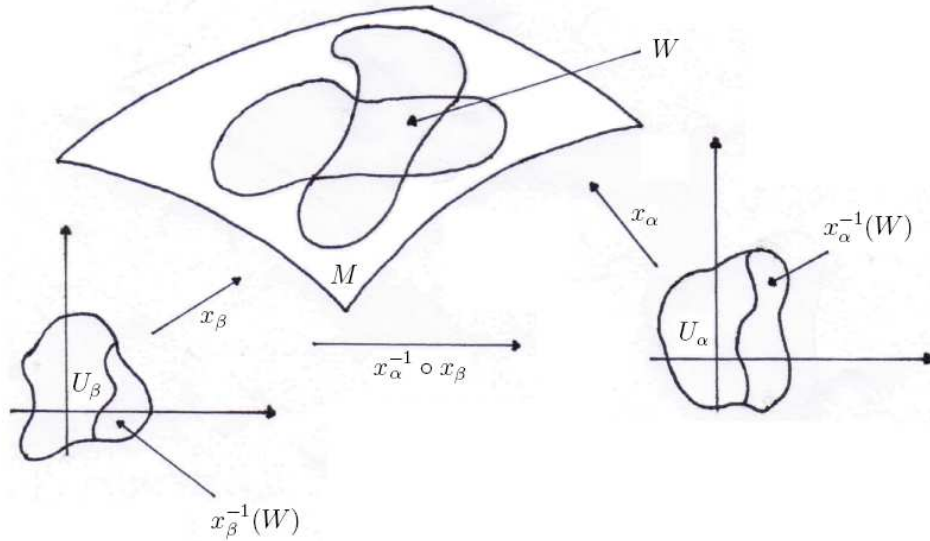


Figura 1.12: Variedad diferenciable

$x_\alpha$  es una parametrización local de  $M$  si  $p \in x_\alpha(U_\alpha)$ ; diremos  $x_\alpha(U_\alpha)$  es una vecindad coordenada de  $p$ .



Observemos que una superficie regular  $S$  es una variedad diferenciable, en efecto:

Por definición de superficie regular tenemos que para cada  $p \in S$  existe una vecindad  $V_p$  en  $\mathbb{R}^3$  y una aplicación  $x_p : U \rightarrow V_p \cap S$  de un conjunto abierto  $U \subset \mathbb{R}^2$  sobre  $V_p \cap S \subset \mathbb{R}^3$  tal que  $x_p$  es un difeomorfismo; por tanto  $x_p(U) = V_p \cap S$ , luego

$$\cup_{p \in S} V_p \cap S = S.$$

De esta manera se cumple la primera condición de la definición de variedad diferenciable. La segunda condición es el teorema de cambio de parámetro de una superficie regular, (ver [4]).

**1.5.1 Definición.** Sea  $M$  una variedad diferenciable. Una función diferenciable  $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$  es llamada una curva diferenciable en  $M$ . Supongamos que  $\alpha(0) = p \in M$  y sea  $\mathcal{D}$  el conjunto de funciones sobre  $M$  que son diferenciables en  $p$ . El vector tangente a la curva  $\alpha$  en  $t = 0$  es una función  $\alpha'(0) : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$\alpha'(0)f = \frac{d(f \circ \alpha)}{dt} \Big|_{t=0}, f \in \mathcal{D}.$$

Un vector tangente en  $p$  es el vector tangente en  $t = 0$  de alguna curva  $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$  con  $\alpha(0) = p$ . El conjunto de todos los vectores tangentes a  $M$  en  $p$  se denota por  $T_p M$  el plano tangente de  $M$  en  $p$ .

Si elegimos una parametrización  $x : U \rightarrow M^n$  en  $p = x(0)$ , podemos expresar la función  $f$  y la curva  $\alpha$  de esa parametrización por

$$f \circ x(q) = f(x_1, \dots, x_n), \quad q = (x_1, \dots, x_n) \in U,$$

y

$$x^{-1} \circ \alpha(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t)),$$

respectivamente. Por tanto, restringiendo  $f$  a  $\alpha$ , obtenemos

$$\alpha'(0)f = \frac{d}{dt}(f \circ \alpha)|_{t=0} = \frac{d}{dt}f(x_1(t), \dots, x_n(t))|_{t=0}$$

$$= \sum_{i=1}^n x'_i(0) \left( \frac{df}{dx_i} \right) = \left( \sum_i x'_i(0) \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right)_o \right) f.$$

En otras palabras, el vector  $\alpha'(0)$  puede expresarse en la parametrización  $x$  por (ver [9])

$$\alpha'(0) = \sum_i x'_i(0) \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right)_o.$$

Observe que  $\left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right)_0$  es el vector tangente en  $p$  de la “curva coordenada” (ver figura 1.13):

$$x_i \rightarrow x(0, \dots, x_i, 0, \dots, 0).$$

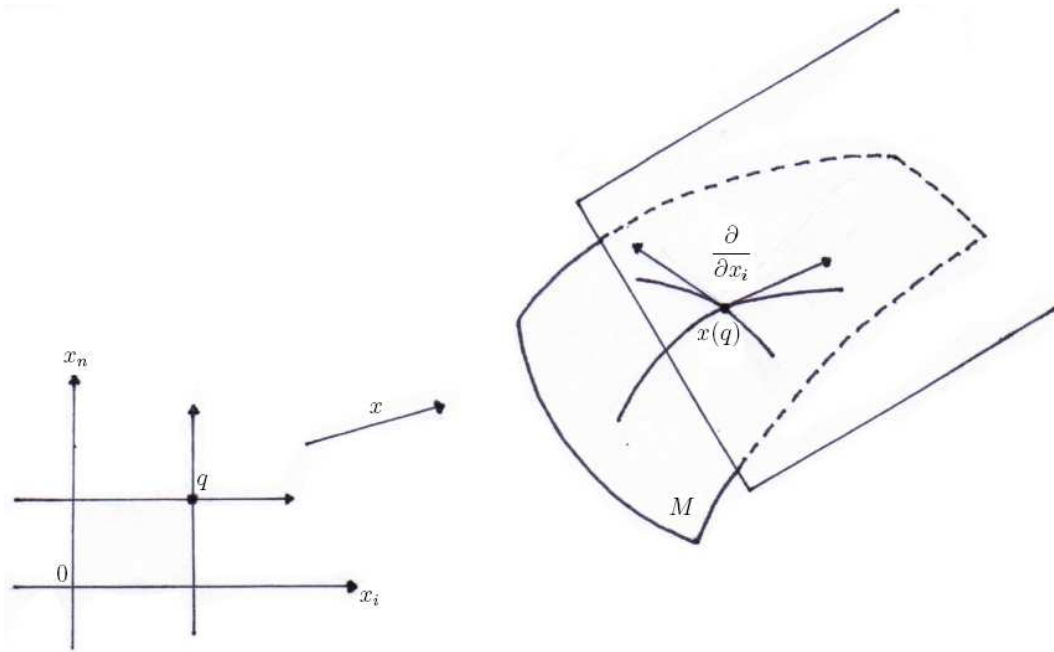


Figura 1.13: Curvas coordenadas

La expresión  $\alpha'(0) = \sum_i x'_i(0) \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right)_o$  muestra que el vector tangente a la curva  $\alpha$  en  $p$  depende sólo de la derivada de  $\alpha$  en un sistema de coordenadas. También se deduce a partir de  $\alpha'(0) = \sum_i x'_i(0) \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right)_o$  que el conjunto  $T_p M$ , con las operaciones usuales de funciones, forma un espacio vectorial tangente de dimensión  $n$ , y que la elección de una parametrización  $x : U \rightarrow M$  determina una base asociada  $\left\{ \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right)_o, \dots, \left( \frac{\partial}{\partial x_n} \right)_o \right\}$  en  $T_p M$  (ver figura 1.13).

Es inmediato que la estructura lineal en  $T_p M$  definida anteriormente no depende de la parametrización  $x$ . El espacio vectorial  $T_p M$  es llamado el espacio tangente de  $M$  en  $p$ .

### 1.5.1. Campos vectoriales

Un campo de vectores, definido en una variedad diferenciable  $M$ , consiste en fijar un vector  $X(p)$ , tangente a  $M$  en  $p$ , para cada punto de  $M$ . Veremos más adelante, en el capítulo 4, la importancia de estos campos vectoriales en el concepto de curvatura.

**1.5.2 Definición.** Un campo vectorial  $X$  en una variedad diferenciable  $M$  es una correspondencia que asocia a cada punto  $p \in M$  un vector  $X(p) \in T_p M$ . En términos de asignaciones,  $X$  es una aplicación de  $M$  en  $TM$ , donde  $TM = \{(p, v); p \in M, v \in T_p M\}$  (fibrado tangente). El campo es diferenciable si la aplicación  $X : M \rightarrow TM$  es diferenciable.

Considerando una parametrización  $x : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$  podemos escribir

$$X(p) = \sum_{i=1}^n a_i(p) \frac{\partial}{\partial x_i},$$

donde cada  $a_i : U \rightarrow \mathbb{R}$  es una función de  $U$  y  $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \right\}$  es la base de  $x_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Es evidente que  $X$  es diferenciable si y sólo si las funciones  $a_i$  son diferenciables para alguna parametrización.

Ocasionalmente, es conveniente utilizar la expresión  $X(p) = \sum_{i=1}^n a_i(p) \frac{\partial}{\partial x_i}$  y pensar

que el campo vectorial es una aplicación  $X : \mathcal{D} \rightarrow M$  para el conjunto  $\mathcal{D}$  sobre las funciones diferenciables  $M$  en el conjunto de funciones de  $M$ , definido de la siguiente manera

$$(Xf)(p) = \sum_i a_i(p) \frac{\partial f}{\partial x_i}(p),$$

donde  $f$  denota, por abuso de notación, la expresión de  $f$  en la parametrización  $X$ . Esta idea de un vector como una derivada direccional es precisamente lo que se utiliza para definir el concepto de vector tangente. Es fácil comprobar que la función  $Xf$  obtenida anteriormente no depende de la elección de la parametrización  $X$ . En este contexto, es inmediato que  $X$  diferenciable si y sólo si

$$X : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$$

es decir,  $Xf \in \mathcal{D}$  para todo  $f \in \mathcal{D}$ , donde  $\mathcal{D}$  es el anillo de las funciones diferenciables sobre  $M$ .

**1.5.3 Teorema.** : Sean  $X$  y  $Y$  campos vectoriales diferenciables en una variedad diferenciable  $M$ , entonces existe un único campo vectorial  $Z$  tal que, para todo  $f \in \mathcal{D}$ ,

$$Zf = (XY - YX)f$$

El campo vectorial  $Z$  dado por el teorema anterior se denomina el corchete de Li.  $[X, Y] = XY - YX$  de  $X$  y  $Y$ ;  $Z$  es diferenciable.

**1.5.4 Teorema.** : Si  $X, Y$  y  $Z$  son campos vectoriales diferenciables en  $M$ ,  $a, b$  son numeros reales, y  $f, g$  son funciones diferenciables, entonces:

- i)  $[X, Y] = -[Y, X]$  (anticonmutativa),
- ii)  $[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z]$  (lineal),
- iii)  $[[X, Y], Z] + [[Z, X], Y] = 0$  (identidad de Jacobi),
- iv)  $[fX, gY] = fg[X, Y] + fX(g)Y - gY(f)X$ .

## 1.5.2. Métrica riemanniana

Hemos visto que, dada una superficie  $S \subset \mathbb{R}^3$ , podemos medir longitudes de los vectores tangentes a  $S$ ; es decir, el producto interno  $\langle v, w \rangle$  de dos vectores tangentes a  $S$  en el punto  $p$  de  $S$ , es simplemente el producto interno de estos vectores en  $\mathbb{R}^3$ . Esta definición del producto interno en cada punto  $p \in S$ , permite obtener la forma cuadrática  $I_p$ , llamada la primera forma fundamental de  $S$  en  $p$ , definida en el plano tangente  $T_p(S)$ . Posteriormente, Riemann introduce lo que hoy se denomina variedad diferenciable de dimensión  $n$ , asociando a cada uno de los puntos de una variedad diferenciable  $M$  la forma cuadrática fundamental; es decir, generalizando la primera forma fundamental de las superficies, la cual da lugar a la métrica sobre una variedad  $M$ .

**1.5.5 Definición.** Una métrica riemanniana (o estructura riemanniana) en una variedad diferenciable  $M$  es una correspondencia que asocia a cada punto  $p$  de  $M$  un producto interno  $\langle, \rangle_p$  (es decir, bilineal, definido positivamente) en el espacio tangente  $T_p M$ , que es diferenciable en el siguiente sentido:

Si  $x : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$  es un sistema de coordenadas en un entorno de  $p$ , con  $x(x_1, x_2, \dots, x_n) = q \in x(U)$  y  $\frac{\partial}{\partial x_i}(q) = dx_q(0, \dots, 1, \dots, 0)$ , entonces  $\left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}(q), \frac{\partial}{\partial x_j}(q) \right\rangle_q = g_{ij}(x_1, \dots, x_n)$  es una función diferenciable en  $U$ .

Es evidente que esta definición no depende de la elección del sistema de coordenadas. Otra forma de expresar la diferencial de la métrica riemanniana es que para cualquier par de campos vectoriales  $X$  y  $Y$ , que son diferenciables en una variedad  $V$  de  $M$ , la función  $\langle X, Y \rangle$  es diferenciable en  $V$ . Es inmediato observar que esta definición es equivalente a la otra.

Es usual que se elimine el índice  $p$  en la función  $\langle, \rangle_p$  siempre que no haya posibilidad de confusión.

La función  $g_{ij}$  es llamada la representación local de la métrica riemanniana (o el  $g_{ij}$  de la métrica) en el sistema de coordenadas  $x : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$ .

**Observación:** Las funciones  $g_{ij}$  (métrica riemanniana de  $M$ ) son la generalización de las componentes de la primera forma fundamental de una superficie regular. Una

variedad diferenciable con métrica riemannianna determina una variedad riemanniana.

**1.5.6 Definición.** : Sean  $M$  y  $N$  variedades riemannianas. Un difeomorfismo  $f : M \rightarrow N$  (es decir,  $f$  es una biyección diferenciable con inversa diferenciable) es llamada una isometría si:

$$\langle u, v \rangle_p = \langle df_p(u), df_p(v) \rangle_{f(p)}, \text{ para todo } p \in M, u, v \in T_p M.$$

### 1.5.3. Conexiones

En una superficie regular  $S$ , para encontrar la aceleración de una curva (segunda derivada), se aprovecha el hecho de que la superficie está contenida en  $\mathbb{R}^3$  para calcular la segunda derivada y, luego, se proyecta ortogonalmente al plano tangente (derivada covariante). Se sabe que una variedad diferenciable no necesita el espacio ambiente  $\mathbb{R}^3$  para que exista, por lo que, no se puede utilizar el procedimiento utilizado para superficies, derivar dos veces y proyectar. Una conexión es un objeto que permite derivar campos vectoriales y se define de manera abstracta como un operador que actúa sobre un par de campos vectoriales  $(X, Y)$  obteniendo un nuevo campo vectorial, denotado por  $\nabla_X Y$ .

Indicaremos por  $\chi(M)$  el conjunto de todos los campos vectoriales de clase  $C^\infty$  en  $M$  y por el anillo real  $\mathcal{D}(M)$  de las funciones de clase  $C^\infty$  definidas en  $M$ .

**1.5.7 Definición.** Una conexión afín  $\nabla$  en una variedad diferenciable  $M$  es una aplicación

$$\nabla : \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow \chi(M),$$

que se denota por  $(X, Y) \xrightarrow{\nabla} \nabla_X Y$  y que cumple las siguientes propiedades:

$$\text{i) } \nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z.$$

$$\text{ii) } \nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z.$$

$$\text{iii) } \nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y,$$

donde  $X, Y, Z \in \chi(M)$  y  $f, g \in \mathcal{D}(M)$ .

**1.5.8 Teorema.** Sea  $M$  una variedad diferenciable con una conexión afin  $\nabla$ . Entonces existe una única correspondencia que asocia a un campo vectorial diferenciable  $V$  a lo largo de la curva  $c : I \rightarrow M$  otro campo vectorial  $\frac{DV}{dt}$  a lo largo de  $c$ , llamado derivada covariante de  $V$  a lo largo de  $c$ , tal que:

$$\text{i) } \frac{D}{dt}(V + W) = \frac{DV}{dt} + \frac{DW}{dt}.$$

$$\text{ii) } \frac{D}{dt}(fV) = \frac{df}{dt}V + f\frac{DV}{dt}, \text{ donde } V \text{ es un campo vectorial a lo largo de } c \text{ y } f \text{ es una función diferenciable en } I.$$

$$\text{iii) Si } V \text{ es inducida por un campo vectorial } Y \in \chi(M), \text{ es decir } V(t) = Y(c(t)), \text{ entonces}$$

$$\frac{DV}{dt} = \nabla_{\frac{dc}{dt}} Y.$$

**Observación** El campo vectorial  $\nabla_X Y$  recibe el nombre de derivada covariante del campo vectorial  $Y$  con respecto al campo vectorial  $X$  para la conexión  $\nabla$ . Esto nos muestra el carácter direccional de la conexión. Así,

$$(\nabla_X Y)(p) = \nabla_{X_p} Y,$$

es la derivada direccional de  $Y$  respecto de  $X_p$  en  $p$ . El valor  $(\nabla_X Y)(p)$  de la derivada covariante en un punto  $p$  sólo depende del vector  $X_p$  y de los valores de  $Y$  a lo largo de cualquier curva  $\alpha$  que pase por  $p$  con dirección  $X_p$ .

Vemos que la conexión nos permite derivar campos vectoriales. Sea  $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \right\}$  una base ortonormal de  $T_p M$ , se puede expresar el campo vectorial  $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j}$  como

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_k \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x_k},$$

donde  $\Gamma_{ij}^k$  se denominan símbolos de la conexión  $\nabla$  (Símbolos de Christoffel) y son funciones diferenciables.

Para el caso que nos ocupa en el capítulo 4. Sea  $\{x_u, x_v\}$  una base ortonormal de  $T_p M$ , donde  $x_u = \frac{\partial}{\partial u}$  y  $x_v = \frac{\partial}{\partial v}$ . La derivada del campo vectorial  $x_v$  respecto al campo vectorial  $x_u$ , se expresa como

$$\begin{aligned}\nabla_{\frac{\partial}{\partial u}} \frac{\partial}{\partial v} &= \Gamma_{uv}^1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \Gamma_{uv}^2 \frac{\partial}{\partial x_2} \\ &= \Gamma_{uv}^1 x_u + \Gamma_{uv}^2 x_v.\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial u}} \frac{\partial}{\partial v} = x_{uv},$$

lo cual corresponde a la forma de derivar los vectores  $x_u, x_v$  en superficies.

**1.5.9 Definición.** Sea  $M$  una variedad diferenciable con una conexión afín  $\nabla$ . Un campo vectorial  $V$  a lo largo de una curva  $c : I \rightarrow M$  es llamado paralelo cuando  $\frac{DV}{dt} = 0$ , para cada  $t \in I$ .

**1.5.10 Teorema.** Sea  $M$  una variedad diferenciable con una conexión afín  $\nabla$ . Supongamos que  $c : I \rightarrow M$  es una curva diferenciable en  $M$  y  $V_0$  un vector tangente a  $M$  en  $c(t_0), t_0 \in I$  (es decir,  $V_0 \in T_{c(t_0)} M$ ). Entonces existe un único campo vectorial paralelo  $V$  a lo largo de  $c$ , tal que  $V(t_0) = V_0$ , ( $V(t)$  es llamado el transporte paralelo  $V(t_0)$  a lo largo de  $c$ ). (Ver demostración en [9], página 52).

**1.5.11 Definición.** Sea  $M$  una variedad diferenciable con una conexión afín  $\nabla$  y una métrica riemanniana  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Una conexión se dice que es compatible con la métrica  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , cuando para cualquier curva suave  $c$  y un par de campos vectoriales paralelos  $P$  y  $P'$  a lo largo de  $c$ , tenemos  $\langle P, P' \rangle = \text{constante}$ .

**1.5.12 Teorema.** Sea  $M$  una variedad riemanniana. Una conexión  $\nabla$  en  $M$  es compatible con una métrica si y sólo si para cualquier par de campos vectoriales  $V$  y  $W$  a lo largo



de una curva diferenciable  $c : I \rightarrow M$ , tenemos

$$\frac{d}{dt} \langle V, W \rangle = \left\langle \frac{DV}{dt}, W \right\rangle + \left\langle V, \frac{DW}{dt} \right\rangle, \quad t \in I.$$

**1.5.13 Corolario.** Una conexión  $\nabla$  en una variedad riemanniana  $M$  es compatible con la métrica si y sólo si

$$X \langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle, \quad X, Y, Z \in \chi(M).$$

**1.5.14 Definición.** Una conexión afín  $\nabla$  en una variedad  $M$ , se dice que es simétrica cuando

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y] \text{ para todo } X, Y \in \chi(M).$$

**Observación** En un sistema de coordenadas  $(U, X)$ , el hecho de que  $\nabla$  sea simétrica implica que para todo  $i, j = 1, \dots, n$ ,

$$\nabla_{X_i} X_j - \nabla_{X_j} X_i = [X_i, X_j] = 0, \quad X_i = \frac{\partial}{\partial x_i},$$

lo que justifica la terminología (esta expresión es equivalente al hecho que  $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$ ).



## Capítulo 2

# Curvatura de una curva plana versus curvatura gaussiana de una superficie

En este capítulo se puede observar como la curvatura de una curva plana se puede interpretar como la rapidez con que cambia el vector tangente respecto a la curva, mientras que en una superficie se puede interpretar como la rapidez con que cambia el plano tangente respecto a la superficie, es decir, el vector tangente es a la curva como el plano tangente es a la superficie para calcular curvatura. También se observará que la curvatura de una curva plana se puede ver como la tasa de variación del vector normal a la curva respecto a un parámetro y de manera análoga, la curvatura gaussiana de una superficie se puede ver como la tasa de variación del vector normal al plano tangente respecto a la superficie mediante una aplicación denominada aplicación de Gauss. De la misma manera como antes, el vector normal es a la curva como el campo vectorial normal es a la superficie para calcular curvatura.

## 2.1. Curvatura de una curva plana

En esta sección presentaremos dos formas de calcular la curvatura de una curva plana. Primero respecto al vector tangente y luego respecto al vector normal a la curva en un punto  $p$ .

Sea  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  una curva parametrizada por la longitud de arco  $s \in I$ . Se define la curvatura  $k(s)$  de  $\alpha$  como

$$k(s) = \left\| \frac{dT}{ds} \right\|,$$

donde  $T$  es el campo vectorial tangente unitario a lo largo de la curva  $\alpha$ . Geométricamente, el numero  $k(s)$  nos indica que tan rápido se desvía la curva de la recta tangente en  $s$ , en un entorno de  $s$  (ver figura 2.1).

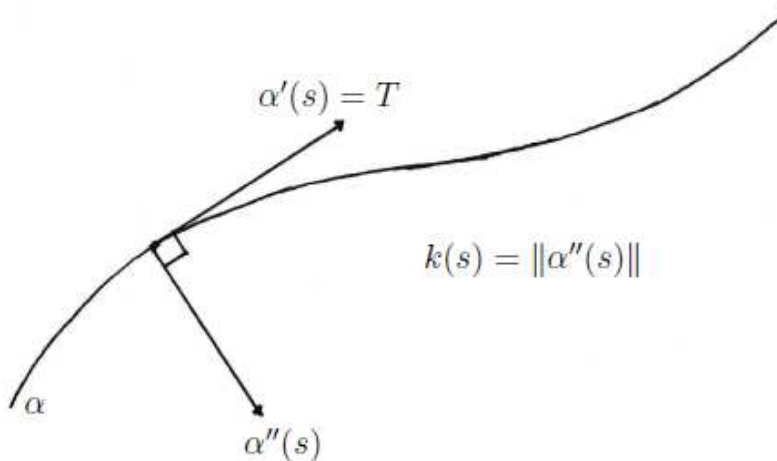


Figura 2.1: Curvatura de una curva plana

Veamos ahora, que la curvatura de una curva plana se puede interpretar como la rapidez con que cambia el vector normal a la curva. Por medio de una rotación de  $\frac{\pi}{2}$  en sentido positivo del vector tangente unitario, se puede obtener el vector normal (ver figura 2.2).

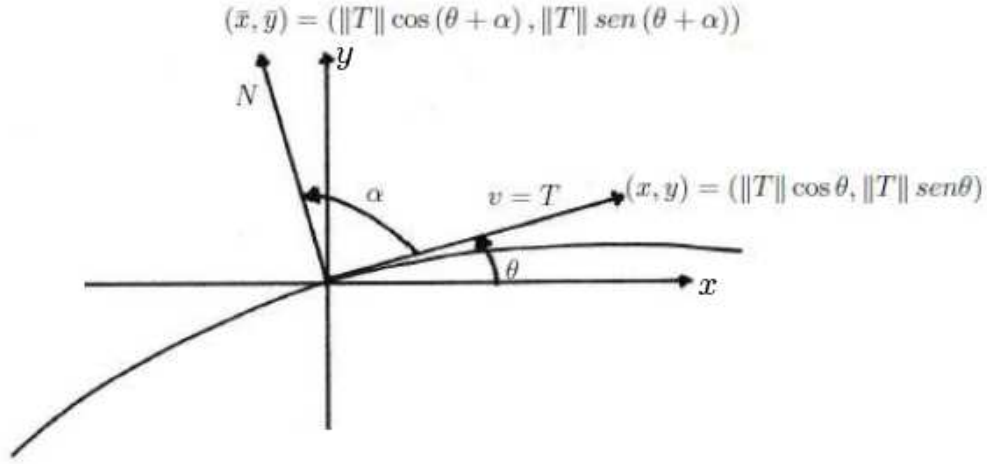


Figura 2.2: Transformación lineal de un vector en el plano

Así,

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \|T\| (\cos \theta \cos \alpha - \text{sen} \theta \text{sen} \alpha) \\ \bar{x} &= \|T\| \cos \theta \cos \alpha - \|T\| \text{sen} \theta \text{sen} \alpha \\ \bar{x} &= x \cos \alpha - y \text{sen} \alpha.\end{aligned}$$

De la misma manera

$$\begin{aligned}\bar{y} &= \|T\| (\text{sen} \theta \cos \alpha + \cos \theta \text{sen} \alpha) \\ \bar{y} &= \|T\| \text{sen} \theta \cos \alpha + \|T\| \cos \theta \text{sen} \alpha \\ \bar{y} &= x \text{sen} \alpha + y \cos \alpha.\end{aligned}$$

Ahora, esta transformación se puede escribir en forma matricial, teniendo en cuenta

$$\|T\| = 1 \text{ y } \alpha = \frac{\pi}{2}.$$

$$\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\operatorname{sen} \alpha \\ \operatorname{sen} \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

así,

$$(\bar{x}, \bar{y}) = (-y, x)$$

luego,

$$\begin{aligned} N(s) &= R_{\frac{\pi}{2}}(T) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\operatorname{sen} \alpha \\ \operatorname{sen} \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ N(s) &= (-y, x) = (-\|T\| \operatorname{sen} \theta, \|T\| \cos \theta) \\ N(s) &= (-y, x) = (-\operatorname{sen} \theta(s), \cos \theta(s)) \end{aligned}$$

derivando  $\frac{dN}{ds}$ , se tiene

$$\frac{dN}{ds} = (-\theta'(s) \cos \theta(s), -\theta'(s) \operatorname{sen} \theta(s)),$$

de donde

$$\begin{aligned} \left\| \frac{dN}{ds} \right\| &= \|(-\theta'(s) \cos \theta(s), -\theta'(s) \operatorname{sen} \theta(s))\| \\ &= \sqrt{(-\theta'(s) \cos \theta(s))^2 + (\theta'(s) \operatorname{sen} \theta(s))^2} \\ &= \sqrt{(\theta'(s))^2 (\cos^2 \theta(s) + \operatorname{sen}^2 \theta(s))} \\ \left\| \frac{dN}{ds} \right\| &= |\theta'(s)| = k(s), \end{aligned}$$

(en el capítulo 3, se muestra la igualdad  $|\theta'(s)| = k(s)$ )  
finalmente,

$$\left\| \frac{dN}{ds} \right\| = k(s).$$

## 2.2. Curvatura gaussiana de una superficie regular

Hemos visto que la curvatura de una curva plana corresponde a la diferencial de un campo vectorial normal unitario y veremos a continuación, que de forma análoga, la curvatura gaussiana de una superficie corresponde a la tasa de variación de un vector normal unitario  $N_p$  al plano tangente  $T_p(S)$  a la superficie en un punto  $p$ , teniendo en cuenta algunas consideraciones. Además, se verá otra forma de expresar la curvatura gaussiana de una superficie en términos de los coeficientes de la primera y la segunda forma fundamental.

**2.2.1 Definición.** Sea  $p \in S$  y sea  $dN_p : T_p(S) \rightarrow T_p(S)$  la diferencial de la aplicación de Gauss. El determinante  $dN_p$  es la curvatura gaussiana  $K$  de  $S$  en  $p$ . El opuesto de la mitad de la traza de  $dN_p$  se denomina la curvatura media  $H$  de  $S$  en  $p$ .

Se debe tener en cuenta que en una curva plana para determinar el valor numérico asociado a la curvatura, basta con hallar la norma del vector curvatura; es decir,  $k = \left\| \frac{dN}{ds} \right\|$ ; mientras que en una superficie al hallar la diferencial de la aplicación de Gauss  $dN_p$ , resulta una matriz, a la cual se le halla el determinante, y este valor numérico corresponde a la curvatura gaussiana  $K = \det(dN_p)$  de  $S$  en  $p$ .

Veamos otra forma de expresar la curvatura gaussiana  $K$ . En la sección 1.3 se obtuvo los coeficientes de la segunda forma fundamental

$$\begin{aligned} e &= -\langle N_u, x_u \rangle = \langle N, x_{uu} \rangle, \\ f &= -\langle N_v, x_u \rangle = \langle N, x_{uv} \rangle = \langle N, x_{vu} \rangle = -\langle N_u, x_v \rangle, \\ g &= -\langle N_v, x_v \rangle = \langle N, x_{vv} \rangle. \end{aligned}$$

Ahora, se obtienen los valores de  $a_{ij}$  en términos de los coeficientes  $e, f, g$  (ver [4]). De las ecuaciones anteriores, se tiene

$$\begin{aligned} -f &= \langle N_u, x_v \rangle = \langle a_{11}x_u + a_{21}x_v, x_v \rangle = a_{11} \langle x_u, x_v \rangle + a_{21} \langle x_v, x_v \rangle = a_{11}F + a_{21}G, \\ -f &= \langle N_v, x_u \rangle = a_{12}E + a_{22}F, \\ -e &= \langle N_u, x_u \rangle = a_{11}E + a_{21}F, \\ -g &= \langle N_v, x_v \rangle = a_{12}F + a_{22}G, \end{aligned}$$

donde  $E, F$  y  $G$  son los coeficientes de la primera forma fundamental en la base  $\{x_u, x_v\}$ . Las relaciones anteriores se pueden expresar en forma matricial como

$$-\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix},$$

luego

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1},$$

donde  $\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1}$  es la inversa de la matriz  $\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$ .

Del algebra lineal se tiene. Si  $\det A \neq 0$ , entonces  $A^{-1} = \frac{1}{\det A} (A^*)^t$ , donde  $A^*$  es la matriz adjunta de  $A$  y  $(A^*)^t$  es la traspuesta de  $A^*$ . Así,

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix},$$

luego

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} -e & -f \\ -f & -g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix},$$

de donde se deducen las siguientes expresiones para los coeficientes  $(a_{ij})$  de la matriz  $dN$  en la base  $\{x_u, x_v\}$



$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} -EG + fF & eF - fE \\ -fG + gF & fF - gE \end{pmatrix}.$$

Así,

$$a_{11} = \frac{fF - eG}{EG - F^2},$$

$$a_{12} = \frac{gF - fG}{EG - F^2},$$

$$a_{21} = \frac{eF - fE}{EG - F^2},$$

$$a_{22} = \frac{fE - gE}{EG - F^2}.$$

Las relaciones anteriormente expuestas, se conocen como las ecuaciones de Weingarten (ver [4]).

En la sección 1.3 también se obtuvo la siguiente expresión

$$dN(\alpha') = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}.$$

Como  $K = \det(dN_p)$ , entonces  $K = \det(a_{ij})$ , luego

$$K = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

de donde

$$K = \det \begin{pmatrix} \frac{fF - eG}{EG - F^2} & \frac{gF - fG}{EG - F^2} \\ \frac{eF - fE}{EG - F^2} & \frac{fF - gE}{EG - F^2} \end{pmatrix}.$$

Calculando el determinante, se obtiene

$$\begin{aligned}
 K &= \frac{1}{(EG - F^2)^2} \det \begin{pmatrix} fF - eG & gF - fG \\ eF - fE & fF - gE \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{(EG - F^2)^2} (f^2 F^2 - fFgE - efFG + eGgE - egF^2 + eFfG + fEgF - f^2 EG) \\
 &= \frac{1}{(EG - F^2)^2} [EG(eg - f^2) - F^2(eg - f^2)] \\
 K &= \frac{1}{(EG - F^2)^2} (eg - f^2) (EG - F^2).
 \end{aligned}$$

Finalmente,

$$K = \det(a_{ij}) = \frac{eg - f^2}{EG - F^2},$$

donde  $K$  es la curvatura gaussiana de  $S$  en  $p$ .

**2.2.2 Ejemplo.** Hallar la curvatura gaussiana de una esfera de radio  $a$ , cuya parametrización en coordenadas esféricas está dada por

$$x(u, v) = (a \sin v \cos u, a \sin v \sin u, a \cos v)$$

$$0 < v < \pi; \quad 0 < u < 2\pi.$$

### Solución

La curvatura gaussiana de una superficie se define como el determinante de la diferencial de la aplicación de Gauss  $K = \det(dN_p)$ , la cual corresponde al diferencial del vector normal unitario al plano tangente en un punto  $p$  de la superficie. El valor numérico asociado a la curvatura gaussiana se puede expresar en términos de los coeficientes de la primera y segunda forma fundamental como

$$K = \det(dN_p) = \det(a_{ij}) = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}.$$

Ahora, calculemos a  $x_u$ ,  $x_v$ ,  $x_{uu}$ ,  $x_{uv}$ ,  $x_{vv}$ ,  $N$

$$x_u = (-a \operatorname{sen} v \operatorname{sen} u, a \operatorname{sen} v \cos u, 0),$$

$$x_v = (a \cos v \cos u, a \cos v \operatorname{sen} u, -a \operatorname{sen} v),$$

$$x_{uu} = (-a \operatorname{sen} v \cos u, -a \operatorname{sen} v \operatorname{sen} u, 0),$$

$$x_{uv} = (-a \cos v \operatorname{sen} u, a \cos v \cos u, 0),$$

$$x_{vv} = (-a \operatorname{sen} v \cos u, -a \operatorname{sen} v \operatorname{sen} u, -a \cos v).$$

$$\begin{aligned} N &= \frac{x_u \wedge x_v}{\|x_u \wedge x_v\|} = \frac{\begin{vmatrix} i & j & k \\ -a \operatorname{sen} v \operatorname{sen} u & a \operatorname{sen} v \cos u & 0 \\ a \cos v \cos u & a \cos v \operatorname{sen} u & -a \operatorname{sen} v \end{vmatrix}}{\sqrt{EG - f^2}} \\ &= \frac{-a^2 \operatorname{sen}^2 v \cos u, -a^2 \operatorname{sen}^2 v \operatorname{sen} u, -a^2 \operatorname{sen} v \cos v \operatorname{sen}^2 u - a^2 \operatorname{sen} v \cos v \cos^2 u}{\sqrt{EG - f^2}} \\ &= \frac{-a^2 \operatorname{sen}^2 v \cos u, -a^2 \operatorname{sen}^2 v \operatorname{sen} u, -a^2 \operatorname{sen} v \cos v (\operatorname{sen}^2 u + \cos^2 u)}{\sqrt{EG - f^2}} \\ &= \frac{a^2 (-\operatorname{sen}^2 v \cos u, -\operatorname{sen}^2 v \operatorname{sen} u, -\operatorname{sen} v \cos v)}{\sqrt{a^2 \operatorname{sen}^2 v \cdot a^2}} \\ &= \frac{a^2 (-\operatorname{sen}^2 v \cos u, -\operatorname{sen}^2 v \operatorname{sen} u, -\operatorname{sen} v \cos v)}{a^2 \operatorname{sen} v} \\ &= (-\operatorname{sen} v \cos u, -\operatorname{sen} v \operatorname{sen} u, -\cos v). \end{aligned}$$

Luego, los coeficientes de la primera y la segunda forma fundamental están dados por

$$\begin{aligned}
E &= \langle x_u, x_u \rangle = a^2 \operatorname{sen}^2 v \operatorname{sen}^2 u + a^2 \operatorname{sen}^2 v \cos^2 u = a^2 \operatorname{sen}^2 v (\operatorname{sen}^2 u + \cos^2 u) = a^2 \operatorname{sen}^2 v, \\
F &= \langle x_u, x_v \rangle = -a^2 \operatorname{sen} v \cos v \operatorname{sen} u \cos u + a^2 \operatorname{sen} v \cos v \operatorname{sen} u \cos u = 0, \\
G &= \langle x_v, x_v \rangle = a^2 \operatorname{sen}^2 v \cos^2 u + a^2 \operatorname{sen}^2 v \operatorname{sen}^2 u + a^2 \cos^2 v \\
&= a^2 \operatorname{sen}^2 v (\cos^2 u + \operatorname{sen}^2 u) + a^2 \cos^2 v = a^2 (\operatorname{sen}^2 v + \cos^2 v) = a^2, \\
e &= \langle N, x_{uu} \rangle = a \operatorname{sen}^2 v \cos^2 u + a \operatorname{sen}^2 v \operatorname{sen}^2 u = a \operatorname{sen}^2 v (\cos^2 u + \operatorname{sen}^2 u) = a \operatorname{sen}^2 v, \\
f &= \langle N, x_{uv} \rangle = a \operatorname{sen} v \cos v \operatorname{sen} u \cos u - a \operatorname{sen} v \cos v \operatorname{sen} u \cos u = 0, \\
g &= \langle N, x_{vv} \rangle = a \operatorname{sen}^2 v \cos^2 u + a \operatorname{sen}^2 v \operatorname{sen}^2 u + a \cos^2 v, \\
&= a \operatorname{sen}^2 v (\cos^2 u + \operatorname{sen}^2 u) + a \cos^2 v = a (\operatorname{sen}^2 v + \cos^2 v) = a.
\end{aligned}$$

Finalmente,

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = \frac{a \operatorname{sen}^2 v a}{a^2 \operatorname{sen}^2 v a^2} = \frac{1}{a^2}.$$

Así, la curvatura gaussiana de una esfera de radio  $a$  es  $K = \frac{1}{a^2}$ .

**2.2.3 Ejemplo.** Demostrar que en el origen  $(0, 0, 0)$  del hiperboloide  $z = axy$ ,  $K = -a^2$

**Solución**

Consideremos la parametrización

$$x(u, v) = (u, v, auv),$$

luego

$$x_u = (1, 0, av)$$

$$x_v = (0, 1, au)$$

$$x_{uv} = (0, 0, a)$$

$$x_{uu} = (0, 0, 0)$$

$$x_{vv} = (0, 0, 0)$$

$$N = \frac{x_u \wedge x_v}{\|x_u \wedge x_v\|} = \frac{\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & av \\ 0 & 1 & au \end{vmatrix}}{\|x_u \wedge x_v\|} = \frac{(-av, -au, 1)}{\sqrt{a^2v^2 + a^2u^2 + 1}}$$

$$E = \langle x_u, x_u \rangle = 1 + a^2v^2$$

$$F = \langle x_u, x_v \rangle = a^2uv$$

$$G = \langle x_v, x_v \rangle = 1 + a^2v^2$$

$$e = \langle N, x_{uu} \rangle = 0$$

$$f = \langle N, x_{uv} \rangle = \frac{a}{\sqrt{a^2v^2 + a^2u^2 + 1}}$$

$$g = \langle N, x_{vv} \rangle = 0.$$

Así

$$K = \frac{eg + f^2}{EG - f^2} = \frac{\frac{-a^2}{a^2v^2 + a^2u^2 + 1}}{a^2v^2 + a^2u^2 + 1} = \frac{-a^2}{(a^2v^2 + a^2u^2 + 1)^2}.$$

Ahora, evaluando en  $(u, v) = (o, o)$ , se obtiene  $K = -\frac{a^2}{1^2} = -a^2$ .

## 2.3. Otra analogía entre la curvatura de una curva plana y la curvatura gaussiana de una superficie

En esta sección se presenta la interpretación geométrica de la curvatura gaussiana  $K$  de una superficie para  $K \neq 0$ , la cual es análoga a la curvatura  $k$  de una curva plana. En el caso de una superficie regular es fundamental la aplicación de Gauss  $N$ , mientras que para el caso de una curva plana se define una aplicación análoga denominada indicatriz normal  $I_n$ .

**2.3.1 Teorema.** Sea  $p$  un punto de una superficie  $S$  tal que la curvatura gaussiana  $K(p) \neq 0$  y sea  $V$  un entorno conexo de  $p$  donde  $K$  no cambia de signo. Entonces

$$K(p) = \lim_{A \rightarrow 0} \frac{A'}{A},$$

donde  $A$  es el área de una región  $B \subset V$  que contiene a  $p$ ,  $A'$  es el área de la imagen de  $B$  por la aplicación de Gauss  $N : S \rightarrow S^2$  (ver figura 2.3), y el límite se toma sobre una sucesión de regiones  $B_n$  que converge a  $p$ , en el sentido de que cualquier bola centrada en  $p$  contiene a todas las  $B_n$ , para  $n$  suficientemente grande.

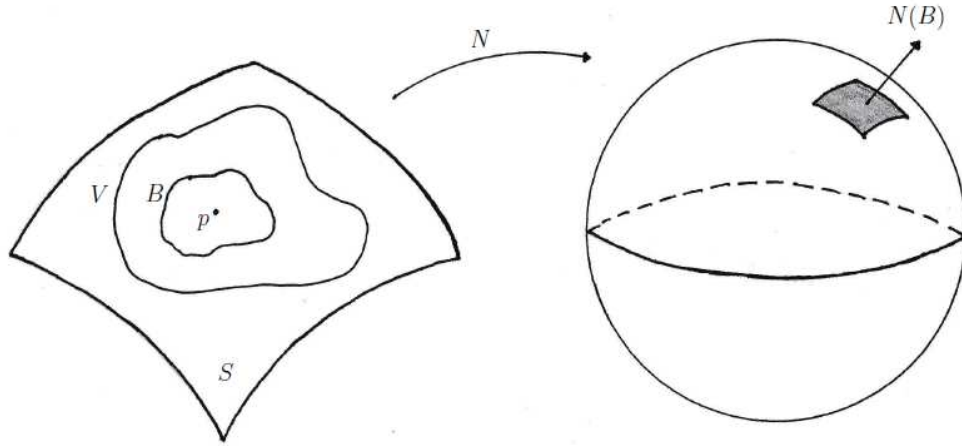


Figura 2.3: Aplicación de Gauss

### Demostración

El área de  $B$  está dada por

$$A = \int \int_R \|x_u \wedge x_v\| \, du dv,$$

donde  $x(u, v)$  es una parametrización en  $p$  cuyo entorno coordinado  $V$  contiene a  $p$  (se puede admitir que  $V$  es suficientemente pequeño) y  $R$  es la región del plano  $uv$  correspondiente a  $B$ .

El área  $A'$  de  $N(B)$  está dada por

$$A' = \int \int_R \|N_u \wedge N_v\| \, du dv.$$

Ahora, expresemos  $A'$  en términos de  $x_u$  y  $x_v$ . Se sabe que

$$N_u = a_{11}x_u + a_{21}x_v,$$

$$N_v = a_{12}x_u + a_{22}x_v,$$

luego

$$\begin{aligned} N_u \wedge N_v &= (a_{11}x_u + a_{21}x_v) \wedge (a_{12}x_u + a_{22}x_v) \\ &= a_{11}a_{12} x_u \wedge x_u + a_{11}a_{22} x_u \wedge x_v + a_{21}a_{12} x_v \wedge x_u + a_{21}a_{22} x_v \wedge x_v. \end{aligned}$$

Como el producto cruz es anticonmutativo, entonces  $x_v \wedge x_u = -x_u \wedge x_v$ . Así,

$$\begin{aligned} N_u \wedge N_v &= a_{11}a_{22} x_u \wedge x_v - a_{21}a_{12} x_u \wedge x_v \\ &= [a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}] (x_u \wedge x_v). \end{aligned}$$

Como  $K = \det(a_{ij}) = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$ , entonces

$$\begin{aligned} A' &= \int \int_R |K(x_u \wedge x_v)| dudv \\ A' &= \int \int_R K |x_u \wedge x_v| dudv, \quad K(p) \neq 0. \end{aligned}$$

Denotando por  $R$ , tanto el área  $A$  de  $B$  como el área  $A'$  de  $N(B)$  y tomando límite, se tiene

$$\lim_{A \rightarrow 0} \frac{A'}{A} = \lim_{R \rightarrow 0} \frac{\frac{A'}{R}}{\frac{A}{R}} = \frac{\lim_{R \rightarrow 0} \frac{1}{R} \int \int_R K |x_u \wedge x_v| dudv}{\lim_{R \rightarrow 0} \frac{1}{R} \int \int_R |x_u \wedge x_v| dudv}.$$

Aplicando el teorema del valor medio para integrales dobles

$$\lim_{A \rightarrow 0} \frac{\frac{A'}{R}}{\frac{A}{R}} = \frac{\lim_{R \rightarrow 0} \frac{1}{R} \int \int_R K |x_u \wedge x_v| dudv}{\lim_{R \rightarrow 0} \frac{1}{R} \int \int_R |x_u \wedge x_v| dudv} = \frac{K |x_u \wedge x_v|}{|x_u \wedge x_v|} = K(p),$$

finalmente

$$\lim_{A \rightarrow 0} \frac{A'}{A} = K(p)$$

**2.3.2 Ejemplo.** Determinemos la curvatura gaussiana del plano aplicando el método anterior.

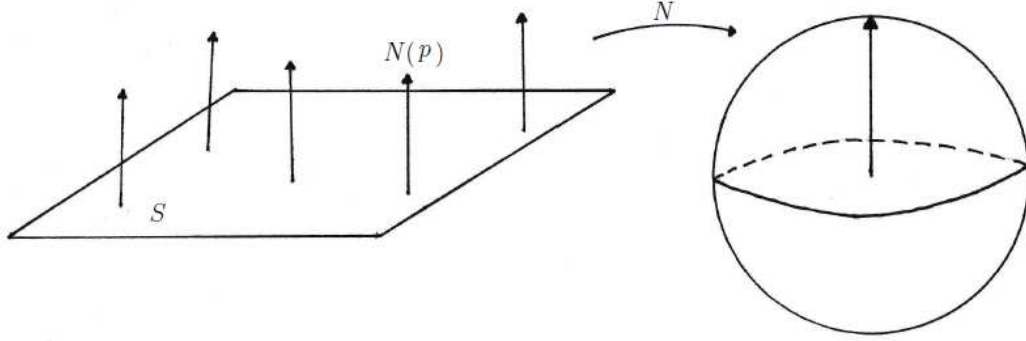


Figura 2.4: Curvatura gaussiana del plano

Si consideramos el área  $A$  de la región  $B \subset V$  que contiene a  $p \in S$ , donde la superficie  $S$  es un plano. La imagen de  $B$  por medio de la aplicación de Gauss es un punto sobre  $S^2$  (ver figura 2.4). Luego, aplicando el teorema 2.3.1

$$K(p) = \lim_{A \rightarrow 0} \frac{A'}{A} = 0,$$

ya que el área  $A'$  de la región  $N(B)$  es cero.

**2.3.3 Ejemplo.** Determinemos la curvatura gaussiana de una esfera de radio  $r$  por el método anterior.

Consideremos el área  $A$  de la región  $B \subset V$  que contiene a  $p \in S$ , donde la superficie  $S$  es una esfera de radio  $r$ . La imagen de  $B$  por medio de la aplicación de Gauss  $N(B)$  en  $S^2$  corresponde a todos los puntos que se encuentran sobre la superficie de la esfera unitaria (ver figura 2.5), es decir,  $A'$  corresponde al área de una esfera de radio uno. Aplicando el teorema 2.3.1, se tiene

$$K(p) = \lim_{A \rightarrow 0} \frac{A'}{A} = \frac{4\pi(1)^2}{4\pi r^2} = \frac{1}{r^2}.$$

Luego, la curvatura gaussiana de una esfera de radio  $r$  es  $K(p) = \frac{1}{r^2}$



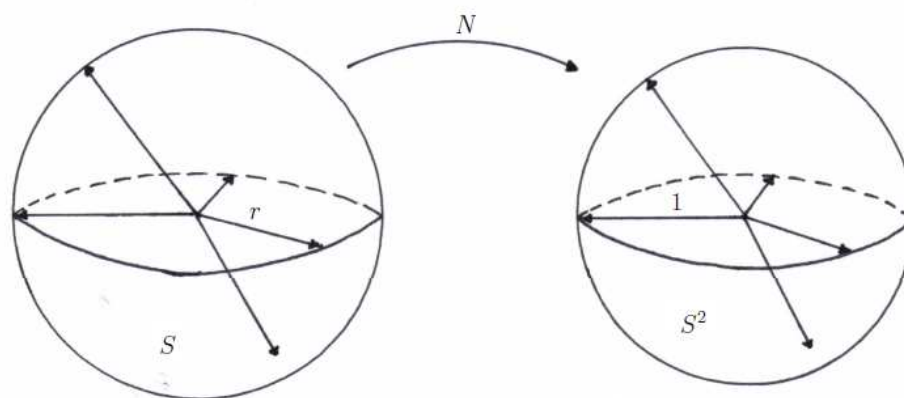


Figura 2.5: Curvatura gaussiana de una esfera

**2.3.4 Ejemplo.** Determinemos la curvatura gaussiana de un cilindro por el método anterior.

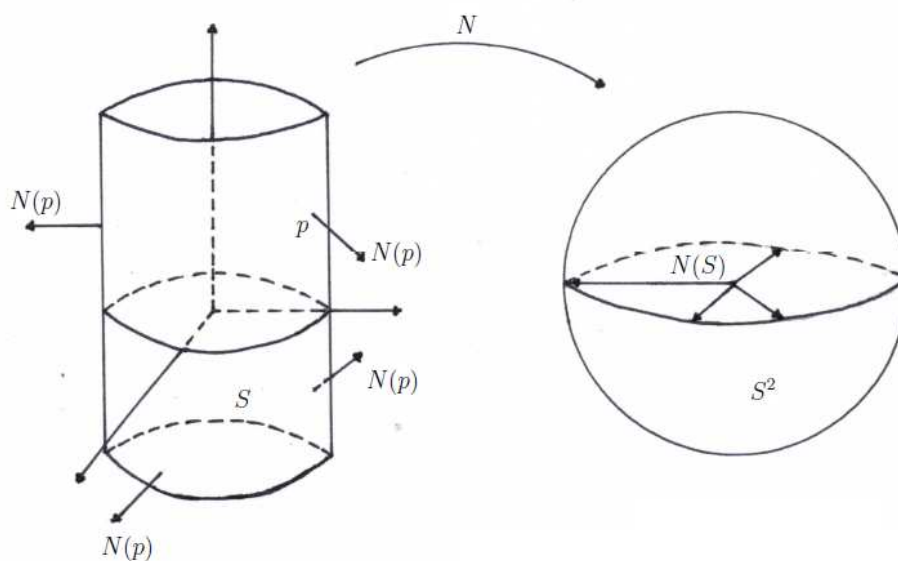


Figura 2.6: Curvatura gaussiana de un cilindro

Consideremos el área  $A$  de la región  $B \subset V$  que contiene a  $p \in S$ , donde la superficie  $S$  es un cilindro. La imagen de  $B$  por medio de la aplicación de Gauss  $N(B)$  en  $S^2$  corresponde a todos los puntos que se encuentran en el paralelo del ecuador (ver figura 2.6), es decir,  $A'$  corresponde al área de una circunferencia de radio uno, la cual es cero.

Aplicando el teorema 2.3.1, se tiene

$$\lim_{A \rightarrow 0} \frac{A'}{A} = \frac{0}{2\pi r h} = 0.$$

### 2.3.1. Indicatriz normal

La curvatura de una curva plana  $C$  en un punto  $p$ , se puede calcular de la siguiente manera,  $k = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\sigma}{s}$ , la cual es análoga a la demostrada en el teorema 2.3.1, donde  $s$  es la longitud de arco de un pequeño segmento de  $C$  que contiene a  $p$  y  $\sigma$  es la longitud de arco de su imagen mediante la indicatriz normal.

**2.3.5 Definición.** La indicatriz normal de una curva  $C$  parametrizada por longitud de arco, se define como

$$I_n : C \rightarrow S^1, p \longrightarrow I_n(p) = n(\alpha(s)),$$

donde  $p = \alpha(s)$ ,  $s \in [0, l]$  y  $n$  es el vector normal a la curva  $C$  en  $p$ .

**2.3.6 Ejemplo.** Determinemos la curvatura de una recta empleando la la indicatriz normal.

Para una recta a se tiene,

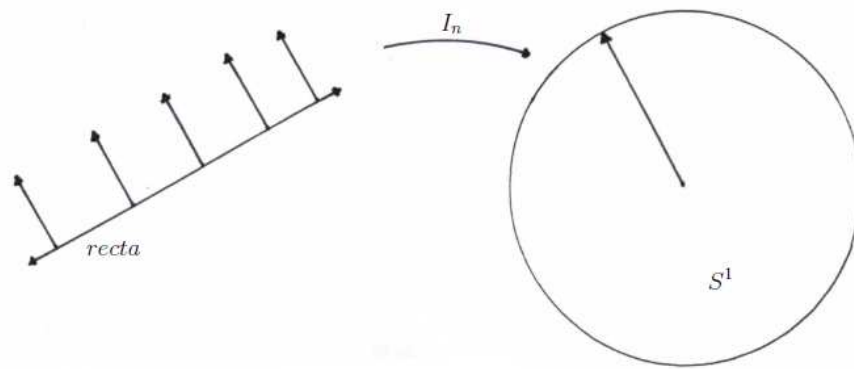


Figura 2.7: Curvatura de la recta

La imagen de la recta a través de la indicatriz normal, es un punto sobre la circunferencia  $S^1$  (ver figura 2.7), ya que los vectores normales en  $p$  a lo largo de la recta son paralelos. Así, la longitud de arco  $\sigma$  es cero, luego

$$k = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\sigma}{s} = 0.$$

Vemos que la curvatura de una recta es cero.

**2.3.7 Ejemplo.** Determinemos la curvatura de una circunferencia de radio  $r$  empleando la indicatriz normal.

Para una circunferencia de radio  $r$  se tiene

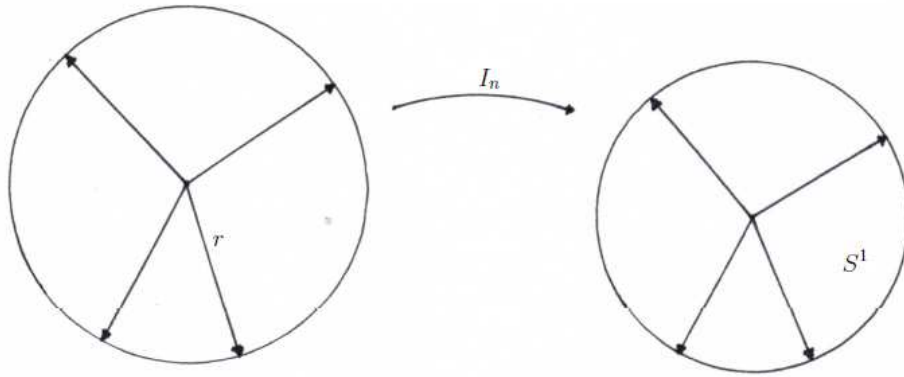


Figura 2.8: Curvatura de una circunferencia

Considerando a  $C$  como una circunferencia de radio  $r$  y tomando a  $s$  como su longitud. La imagen de  $C$  por medio de la indicatriz normal, es una circunferencia de radio 1 en  $S^1$ . Así, la longitud  $\sigma$  corresponde a la longitud de una circunferencia de radio 1, luego

$$k = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\sigma}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{2\pi}{2\pi r} = \frac{1}{r}.$$

Así, se observa que la curvatura de una circunferencia de radio  $r$  es  $\frac{1}{r}$ .

**2.3.8 Ejemplo.** Determinemos la curvatura de la parábola  $y = x^2$  en el origen empleando la indicatriz normal.

Una parametrización para la parábola  $y = x^2$ , es

$$\alpha(t) = (x(t), y(t))$$

$$\alpha(t) = (t, t^2) \quad t \in \mathbb{R},$$

el vector tangente a la curva  $\alpha$  en cualquier  $t$  está dado por

$$\alpha'(t) = (x'(t), y'(t)) = (1, 2t).$$

Ahora, hallemos al vector normal a la curva  $\alpha(t)$ , el cual se obtiene realizando una rotación de  $\frac{\pi}{2}$  al vector tangente  $\alpha'(t)$

$$n(t) = \begin{pmatrix} \cos \beta & -\operatorname{sen} \beta \\ \operatorname{sen} \beta & \cos \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}; \text{ donde } \beta = \frac{\pi}{2}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -y'(t) \\ x'(t) \end{pmatrix} = (-y'(t), x'(t))$$

$$n(t) = (-2t, 1)$$

Normalizando el vector  $n(t)$ , se obtiene

$$n(t) = \frac{(-2t, 1)}{\sqrt{1 + 4t^2}}.$$

Así,  $n(t)$  es la imagen de  $\alpha(t)$  a través de la indicatriz normal, luego

$$k(t) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\sigma}{s},$$

donde  $\sigma$  es la longitud de arco de la imagen de  $\alpha(t)$  a través de la indicatriz normal,  $s$  es la longitud de arco de un pequeño segmento de  $\alpha(t)$ . Luego,

$$k = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\int_0^t \|n'(u)\| du}{\int_0^t \|\alpha'(u)\| du}.$$

Se debe hallar  $\|n'(u)\|$  y  $\|\alpha'(u)\|$ ,

$$\begin{aligned} n'(u) &= \left( \frac{(-2u, 1)}{\sqrt{1+4u^2}} \right)' \\ &= \frac{-4u}{(1+4u^2)^{3/2}}(-2u, 1) + \frac{1}{(1+4u^2)^{3/2}}(-2, 0); \text{ haciendo } a = (1+4u^2)^{1/2} \\ n'(u) &= \left( \frac{8u^2}{a^3} - \frac{2}{a}, \frac{-4u}{a^3} \right). \end{aligned}$$

Así,  $\|n'(u)\| = \sqrt{\left(\frac{8u^2}{a^3} - \frac{2}{a}\right)^2 + \frac{16u^2}{a^6}}$ , con  $a = (1+4u^2)^{1/2}$ , simplificando, se obtiene

$$\|n'(u)\| = \frac{2}{1+(2u)^2},$$

La norma de  $\alpha'(u)$  está dada por

$$\|\alpha'(u)\| = \sqrt{1+4u^2}.$$

De esta manera,  $k = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\int_0^t \frac{2}{1+(2u)^2} du}{\int_0^t \sqrt{1+4u^2} du}$

resolviendo las integrales

$$\text{i) } \int_0^t \frac{2}{1+(2u)^2} du = [\arctan(2u)]_0^t = \arctan(2t).$$

$$\begin{aligned} \text{ii) } \int_0^t \sqrt{1+4u^2} du &= \int_0^t \frac{1}{\cos \theta} \cdot \frac{\sec^2 \theta}{2} d\theta \\ &= \int_0^t \frac{1}{2} \sec^3 \theta d\theta. \end{aligned}$$

aplicando la fórmula de reducción a la integral anterior

$$\int \sec^k x dx = \frac{\tan x \sec^{k-2} x}{k-1} + \frac{k-2}{k-1} \int \sec^{k-2} x dx; \quad k \neq 1,$$

se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^t \sec^3 \theta &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\tan \theta \sec \theta}{2} + \frac{1}{2} \int_0^t \sec \theta d\theta \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\tan \theta \sec \theta}{2} + \frac{1}{2} \ln |\sec \theta + \tan \theta| \right]_0^t \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{2u\sqrt{1+4u^2}}{2} + \frac{1}{2} \ln |\sqrt{1+4u^2} + 2u| \right]_0^t \\ &= \frac{1}{4} \left[ 2t\sqrt{1+4t^2} + \ln |\sqrt{1+4t^2} + 2t| \right]. \end{aligned}$$

Volviendo de nuevo al límite y sustituyendo las integrales, se obtiene

$$k = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\arctan(2t)}{\frac{1}{4} [2t\sqrt{1+4t^2} + \ln |\sqrt{1+4t^2} + 2t|]}.$$

Como el límite es una indeterminación de la forma  $\frac{0}{0}$ , entonces aplicando la regla de l'Hôpital, y evaluando en  $t = 0$ , se obtiene

$$k = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{2}{1+4t^2}}{\frac{1}{4} \left[ \frac{2(1+4t^2) + 8t^2}{\sqrt{1+4t^2}} + \frac{4t}{(\sqrt{1+4t^2} + 2t)(\sqrt{1+4t^2})} + \frac{2}{\sqrt{1+4t^2} + 2t} \right]}$$

$$k = \frac{2}{\frac{1}{4}[2 + 0 + 2]}$$

finalmente,

$$k = 2.$$

### Observación

Veamos que la curvatura de la parábola  $y = x^2$  en el origen corresponde al valor obtenido anteriormente.

Como  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  es una curva plana parametrizada por un parámetro arbitrario, la curvatura con signo de  $\alpha$  en  $t$  está dada por

$$k(t) = \frac{x'(t)y''(t) + x''(t)y'(t)}{((x'(t))^2 + (y'(t))^2)^{3/2}}.$$

Para el caso de la parábola parametrizada por  $\alpha(t) = (t, t^2)$ , se tiene  $\alpha'(t) = (1, 2t)$  y  $\alpha''(t) = (0, 2)$ , luego

$$k(t) = \frac{1 \cdot 2 + 0 \cdot 2t}{(1 + 4t^2)^{3/2}}.$$

Así, la curvatura de la parábola  $y = x^2$  en el origen ( $t = 0$ ), es  $k = 2$ .





## Capítulo 3

# Curvatura de una curva plana versus curvatura geodésica de una curva en una superficie

En este capítulo se mostrará como la curvatura  $k$  de una curva plana se puede interpretar como la tasa variación del ángulo  $\theta(s)$  que forma el vector tangente a la curva con respecto a una dirección fija (eje  $x$ ), y que resulta ser análoga a la curvatura geodésica  $k_g$  de una curva en una superficie con algunas consideraciones especiales como se verá más adelante.

### 3.1. Curvatura de una curva plana

La curvatura  $k$  de una curva  $\alpha$  parametrizada por la longitud de arco  $s$  está dada por

$$k = \left\| \frac{dT}{ds} \right\|,$$

donde  $T$  es el campo vectorial tangente unitario a lo largo de  $\alpha$ .

Veamos ahora, otra forma de expresar la curvatura  $k$  de una curva plana.

Sea  $\theta(s)$  la medida en radianes del ángulo de la dirección del vector tangente unitario  $T$ , respecto a una dirección fija (semi-eje positivo  $x$ ) (ver figura 3.1).

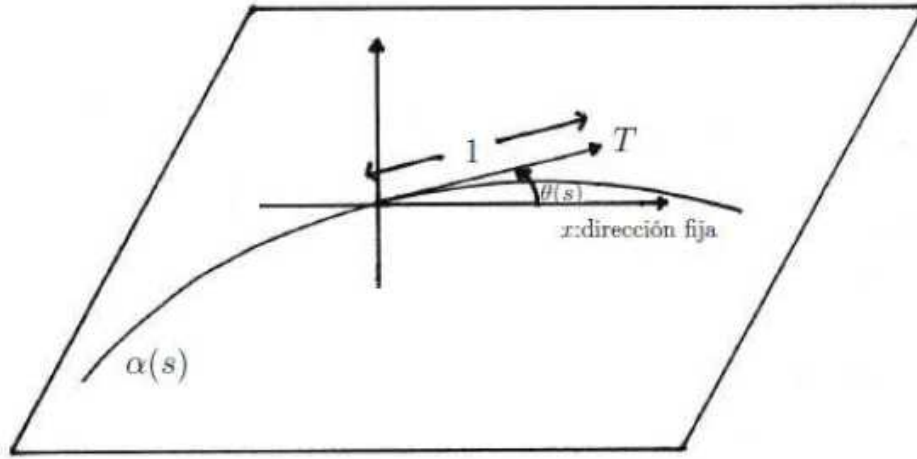


Figura 3.1: Variación de un vector tangente respecto a una dirección fija

El vector  $T$  se puede escribir como

$$T(s) = (\|T\| \cos \theta(s), \|T\| \operatorname{sen} \theta(s)); \quad \|T\| = 1$$

luego,

$$T(s) = (\cos \theta(s), \operatorname{sen} \theta(s))$$

$$T(s) = \cos \theta(s) \hat{i} + \operatorname{sen} \theta(s) \hat{j}.$$

Derivando  $\frac{dT}{ds}$ , se obtiene

$$\frac{dT}{ds} = (-\operatorname{sen} \theta(s) \cdot \theta'(s), \cos \theta(s) \cdot \theta'(s))$$

$$T'(s) = -\operatorname{sen} \theta(s) \cdot \theta'(s) \hat{i} + \cos \theta(s) \cdot \theta'(s) \hat{j}.$$

Como,  $k = \left\| \frac{dT}{ds} \right\|$ , entonces

$$\begin{aligned}
 k &= \|(-\operatorname{sen}\theta(s) \cdot \theta'(s), \cos\theta(s) \cdot \theta'(s))\| \\
 &= \sqrt{(-\operatorname{sen}\theta(s) \cdot \theta'(s))^2 + (\cos\theta(s) \cdot \theta'(s))^2} \\
 &= \sqrt{\operatorname{sen}^2\theta(s)(\theta'(s))^2 + \cos^2\theta(s)(\theta'(s))^2} \\
 &= \sqrt{(\theta'(s))^2(\operatorname{sen}^2\theta(s) + \cos^2\theta(s))} \\
 k &= |\theta'(s)|.
 \end{aligned}$$

Así,

$$k = \left\| \frac{dT}{ds} \right\| = \left\| \frac{dN}{ds} \right\| = |\theta'(s)|,$$

es decir, la curvatura de una curva plana también se puede interpretar como la rapidez con que varía el ángulo que forma el campo vectorial tangente unitario con respecto a una dirección fija (semi-eje positivo  $x$ ).

## 3.2. Curvatura geodésica de una curva en una superficie

En esta sección se presentará la curvatura de una curva definida en una superficie, curvatura geodésica, como la tasa de variación del ángulo formado por el campo vectorial tangente y un campo vectorial fijo que llamaremos, campo vectorial paralelo. Es decir, que la curvatura geodésica es análoga a la curvatura de una curva plana definida en la sección anterior.

**3.2.1 Definición.** Sea  $W$  un campo diferenciable de vectores unitarios a lo largo de una curva parametrizada  $\alpha : I \rightarrow S$  sobre una superficie orientada  $S$ . Como  $W(t)$ ,

$t \in I$ , es un campo vectorial unitario,  $(dW/dt)(t)$  es normal a  $W(t)$  y por tanto

$$\frac{DW}{dt} = \lambda(N \wedge W(t)),$$

donde  $N$  es el vector normal al plano tangente en  $\alpha(t)$  y  $\frac{DW}{dt}$  es la derivada covariante del campo vectorial  $W$ .

El número real  $\lambda = \lambda(t)$ , denotado por  $\left[ \frac{DW}{dt} \right]$ , se denomina el valor algebraico de la derivada covariante de  $W$  en  $t$  (ver figura 3.2).

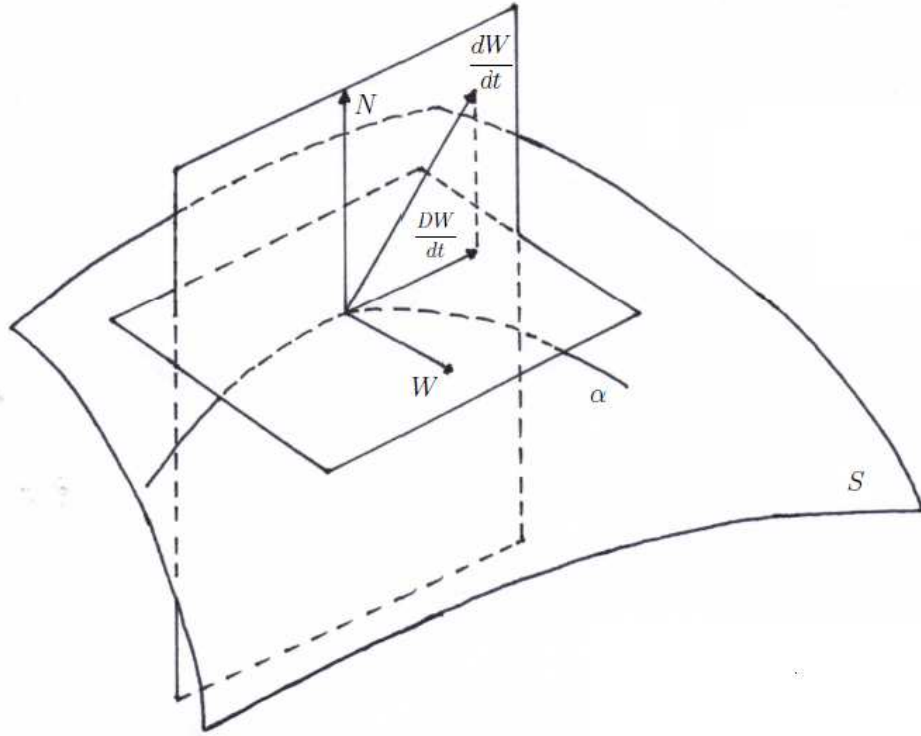
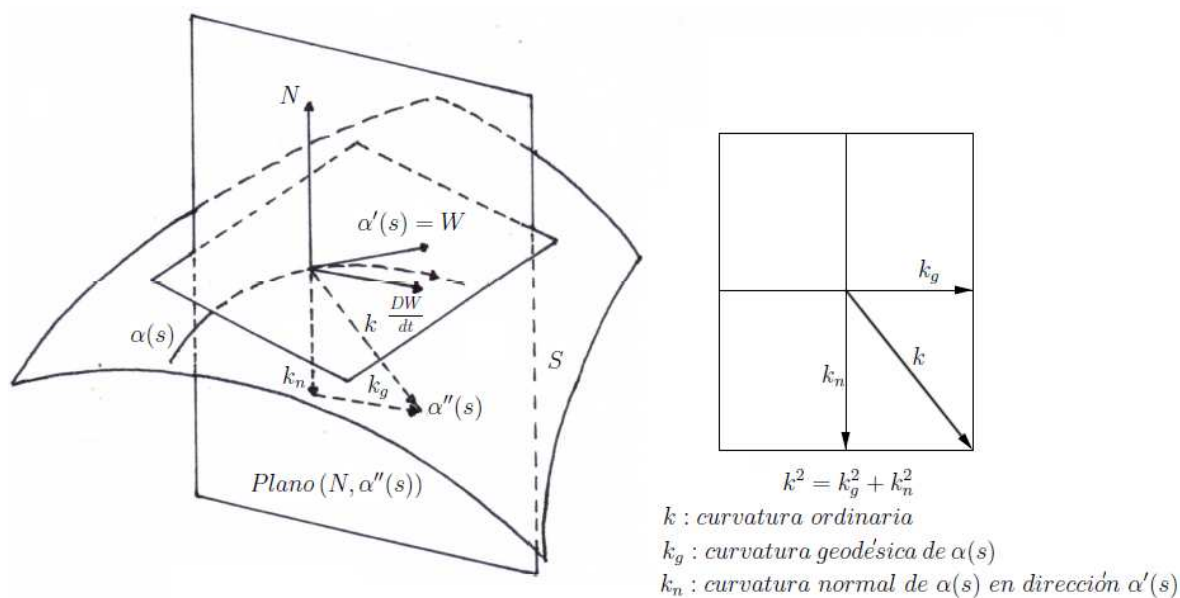


Figura 3.2: Valor algebraico de la derivada covariante

**3.2.2 Definición.** Sea  $C$  una curva regular orientada contenida en una superficie orientada  $S$ , y sea  $\alpha(s)$  una parametrización de  $C$  por la longitud de arco  $s$ , en un entorno de  $p \in S$ . El valor algebraico de la derivada covariante  $\left[ \frac{D\alpha'(s)}{ds} \right] = k_g$  de  $\alpha'(s)$  en  $p$ , se denomina la curvatura geodésica de  $C$  en  $p$  (ver figura 3.3).

Figura 3.3: Curvatura geodésica de  $C$  en  $p$ 

**3.2.3 Ejemplo.** Calcular la curvatura geodésica del paralelo de la esfera unitaria en  $\phi = \frac{\pi}{4}$ .

**Solución**

Sea  $S$  la esfera unidad y  $\alpha$  el paralelo formado por el ángulo  $\phi = \frac{\pi}{4}$  (ver figura 3.4).

Sabemos que la curvatura geodésica ( $k_g$ ), la curvatura normal ( $k_n$ ) y la curvatura ordinaria ( $k$ ) satisfacen la siguiente ecuación

$$k^2 = k_g^2 + k_n^2,$$

basta con hallar  $k_n$  y  $k$ , para determinar el valor de  $k_g$ .

La curvatura ordinaria ( $k$ ) del paralelo  $\alpha$  a la esfera formado por el ángulo  $\phi = \frac{\pi}{4}$  es

$$k = \frac{1}{r} = \frac{1}{\sin \phi}.$$

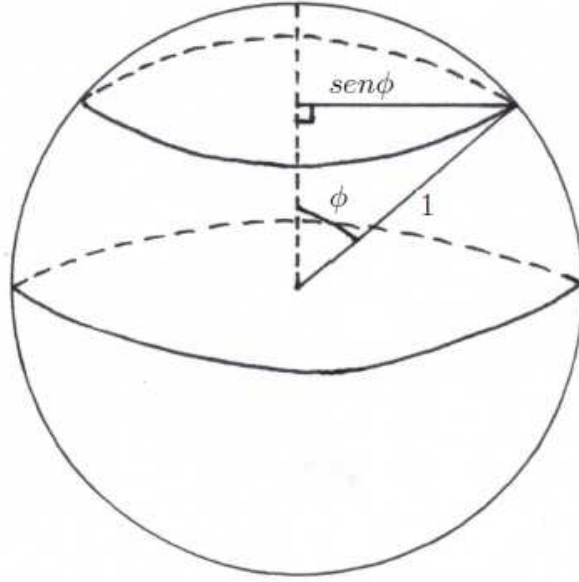


Figura 3.4: Curvatura geodesica en una esfera

Ahora, determinemos la curvatura normal ( $k_n$ ).

Tomemos la parametrización de la esfera dada por

$$x(u, v) = (\text{sen} v \cos u, \text{sen} v \text{sen} u, \cos v); \quad 0 < v < \pi, \quad 0 < u < 2\pi.$$

Como  $\alpha$  es un paralelo en  $v = \frac{\pi}{4}$ , entonces  $v = \text{cte}$ .

Así,

$$x(u) = \alpha(u) = (\text{sen}\phi \cos u, \text{sen}\phi \text{sen} u, \cos \phi).$$

Veamos si  $\alpha(u)$  es una parametrización por longitud de arco.

$$\alpha'(u) = (-\text{sen}\phi \text{sen} u, \text{sen}\phi \cos u, 0),$$

luego, la norma de  $\alpha'(u)$  es

$$\|\alpha'(u)\| = \sqrt{\text{sen}^2 \phi} = \text{sen}\phi.$$

Como  $\|\alpha'(u)\| \neq 1$ , entonces  $\alpha(u)$  no está parametrizada por parámetro longitud de arco.

Parametricemos  $\alpha(u)$  por longitud de arco

$$s = \int_0^u \|\alpha'(t)\| dt = \int_0^u \text{sen}\phi dt = u \text{sen}\phi,$$

por tanto  $u = \frac{s}{\text{sen}\phi}$ .

Sustituyendo a  $u$  en  $\alpha(u)$ , se obtiene

$$\alpha(s) = \left( \text{sen}\phi \cos\left(\frac{s}{\text{sen}\phi}\right), \text{sen}\phi \text{sen}\left(\frac{s}{\text{sen}\phi}\right), \cos\phi \right).$$

Derivamos con respecto a  $s$

$$\alpha'(s) = \left( -\text{sen}\left(\frac{s}{\text{sen}\phi}\right), \cos\left(\frac{s}{\text{sen}\phi}\right), 0 \right).$$

Ahora, obtengamos a  $\alpha''(s)$

$$\alpha''(s) = \left( -\frac{1}{\text{sen}\phi} \cos\left(\frac{s}{\text{sen}\phi}\right), -\frac{1}{\text{sen}\phi} \text{sen}\left(\frac{s}{\text{sen}\phi}\right), 0 \right)$$

$$\alpha''(s) = \frac{1}{\text{sen}\phi} \left( -\cos\left(\frac{s}{\text{sen}\phi}\right), -\text{sen}\left(\frac{s}{\text{sen}\phi}\right), 0 \right).$$

Así,

$$k_n = \langle N, \alpha''(s) \rangle, \text{ donde } N = \frac{\alpha(s)}{\|\alpha(s)\|} = \alpha(s).$$

Luego

$$k_n = \langle N, \alpha''(s) \rangle = \langle \alpha(s), \alpha''(s) \rangle$$

$$k_n = -\cos^2\left(\frac{s}{\text{sen}\phi}\right) - \text{sen}^2\left(\frac{s}{\text{sen}\phi}\right) = -1.$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} k_g^2 &= k^2 - k_n^2 \\ &= \frac{1}{\text{sen}^2\phi} - 1 \\ k_g &= \sqrt{\frac{1 - \text{sen}^2\phi}{\text{sen}^2\phi}} \\ &= \sqrt{\cot^2\phi} = |\cot\phi|. \end{aligned}$$

Como  $\phi = \frac{\pi}{4}$ , entonces

$$k_g = \left| \cot \left( \frac{\pi}{4} \right) \right| = 1.$$

Dados dos campos vectoriales diferenciables  $V$  y  $W$  a lo largo de una curva parametrizada  $\alpha : I \rightarrow S$ , con  $\|V(t)\| = \|W(t)\| = 1$ ,  $t \in I$ . Se quiere definir una función diferenciable  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$  de forma que  $\varphi(t)$ ,  $t \in I$ , sea una determinación de ángulo de  $V(t)$  a  $W(t)$  en la orientación de  $S$ .

Sea  $\{V(t), \bar{V}(t)\}$  una base ortonormal positiva para cada  $t \in I$ . De esta manera,  $W(t)$  puede expresarse

$$W(t) = a(t)V(t) + b(t)\bar{V}(t),$$

donde  $a$  y  $b$  son funciones diferenciables en  $I$  y  $a^2 + b^2 = 1$ .

El siguiente resultado establece que fijado un ángulo  $\varphi_0$  de  $V(t_0)$  a  $W(t_0)$ ; es posible extender diferenciablemente a  $I$ , dando lugar a la función buscada (ver figura 3.5).

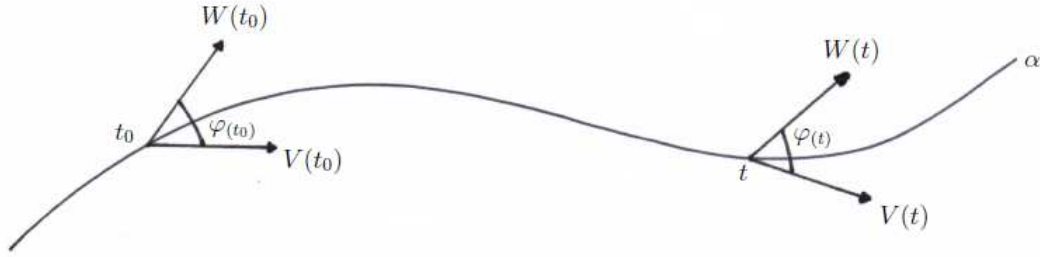


Figura 3.5: Función  $\varphi$

**3.2.4 Teorema.** Sean  $a$  y  $b$  dos funciones diferenciables en  $I$  con  $a^2 + b^2 = 1$  y sea  $\varphi_0$  tal que  $a(t_0) = \cos \varphi_0$ ,  $b(t_0) = \sin \varphi_0$ . Entonces la función diferenciable

$$\varphi = \varphi_0 + \int_{t_0}^t (ab' - ba') dt$$

satisface  $\cos \varphi(t) = a(t)$ ,  $\sin \varphi(t) = b(t)$ ,  $t \in I$  y  $\varphi(t_0) = \varphi_0$ .



### Demostración

Basta con probar que la función

$$(a - \cos \varphi)^2 + (b - \operatorname{sen} \varphi)^2 = 0;$$

es decir,

$$\begin{aligned} a^2 - 2a \cos \varphi + \cos^2 \varphi + b^2 - 2a \operatorname{sen} \varphi + \operatorname{sen}^2 \varphi &= 0 \\ (a^2 + b^2) + (\operatorname{sen}^2 \varphi + \cos^2 \varphi) - 2(a \cos \varphi + b \operatorname{sen} \varphi) &= 0 \\ 2 - 2(a \cos \varphi + b \operatorname{sen} \varphi) &= 0, \end{aligned}$$

o de manera equivalente

$$a \cos \varphi + b \operatorname{sen} \varphi = A = 1.$$

Como  $a^2 + b^2 = 1$ , entonces derivando a ambos lados, se tiene

$$\begin{aligned} 2aa' + 2bb' &= 0 \\ aa' + bb' &= 0 \\ aa' &= -bb'. \end{aligned}$$

Derivando a  $A = a \cos \varphi + b \operatorname{sen} \varphi$ , utilizando el resultado  $aa' = -bb'$  y la definición de  $\varphi$ , es decir,  $\varphi' = ab' - ba'$ , se obtiene

$$\begin{aligned} A' &= (a \cos \varphi + b \operatorname{sen} \varphi)' \\ &= a' \cos \varphi + a(-\operatorname{sen} \varphi) \varphi' + b' \operatorname{sen} \varphi + b(\cos \varphi) \varphi' \\ &= -a(\operatorname{sen} \varphi) \varphi' + b(\cos \varphi) \varphi' + b' \operatorname{sen} \varphi \\ &= -a(\operatorname{sen} \varphi)(ab' - ba') + b(\cos \varphi)(ab' - ba') + a' \cos \varphi + b' \operatorname{sen} \varphi \\ &= -a^2 b' \operatorname{sen} \varphi + aa' b \operatorname{sen} \varphi + abb' \cos \varphi - b^2 a' \cos \varphi + a' \cos \varphi + b' \operatorname{sen} \varphi \\ &= -a^2 b' \operatorname{sen} \varphi + (-bb') b \operatorname{sen} \varphi + a(-aa') \cos \varphi - b^2 a' \cos \varphi + a' \cos \varphi + b' \operatorname{sen} \varphi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A' &= -a^2 b' \operatorname{sen} \varphi - b^2 b' \operatorname{sen} \varphi - a^2 a' \cos \varphi - b^2 a' \cos \varphi + a' \cos \varphi + b' \operatorname{sen} \varphi \\
&= -b' (\operatorname{sen} \varphi) (a^2 + b^2) - a' (\cos \varphi) (a^2 + b^2) + a' \cos \varphi + b' \operatorname{sen} \varphi \\
&= -b' (\operatorname{sen} \varphi) - a' (\cos \varphi) + a' \cos \varphi + b' \operatorname{sen} \varphi \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,  $A(t) = \text{constante}$  y como  $A(t_0) = 1$ , el teorema queda demostrado.

Con el resultado anterior ya podemos relacionar la derivada covariante de dos campos vectoriales unitarios a lo largo de una curva con el ángulo que forman dichos campos.

**3.2.5 Teorema.** Sean  $V$  y  $W$  dos campos vectoriales diferenciables a lo largo de la curva  $\varphi : I \rightarrow S$ , con  $|W(t)| = |V(t)| = 1$ ,  $t \in I$ . Entonces

$$\left[ \frac{DW}{dt} \right] - \left[ \frac{DV}{dt} \right] = \frac{d\varphi}{dt},$$

donde  $\varphi$  es una de las determinaciones diferenciables del ángulo de  $V$  a  $W$ , como la construida en el teorema anterior.

### Demostración

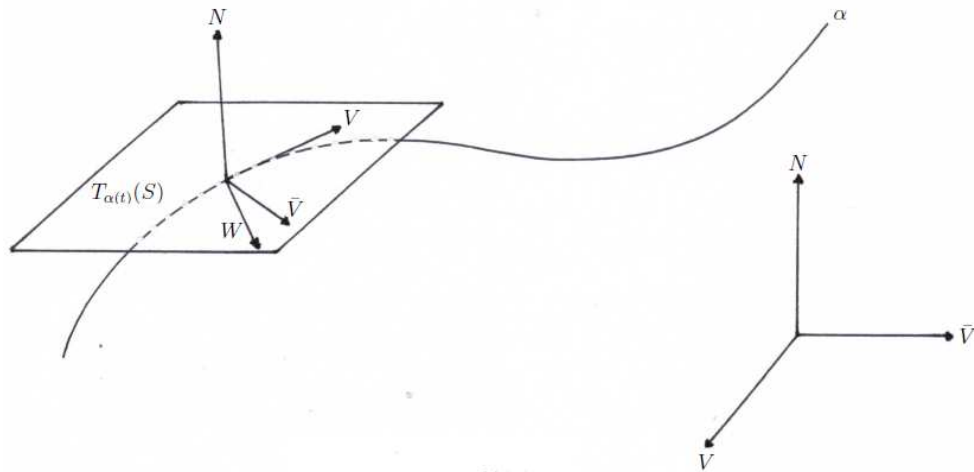


Figura 3.6: Teorema del valor algebraico

Se introduce los vectores  $\bar{V} = N \wedge V$  y  $\bar{W} = N \wedge W$ , con  $\|\bar{V}\| = \|\bar{W}\| = 1$ .

Como  $\{V, \bar{V}\}$  es una base ortonormal de  $T_{\alpha(t)}(s)$ , entonces  $W$  se puede escribir como

$$W = (\cos \varphi)V + (\sin \varphi)\bar{V},$$

donde  $\varphi$  es el ángulo de  $V$  a  $W$ .

Sustituyendo  $W$  en  $\bar{W} = N \wedge W$ , se obtiene

$$\begin{aligned}\bar{W} &= N \wedge ((\cos \varphi)V + (\sin \varphi)\bar{V}) \\ &= (\cos \varphi)N \wedge V + (\sin \varphi)N \wedge \bar{V} \\ &= (\cos \varphi)\bar{V} - (\sin \varphi)V.\end{aligned}$$

Ahora, derivemos con respecto a  $t$  en  $W = (\cos \varphi)V + (\sin \varphi)\bar{V}$

$$W' = -\varphi'(\sin \varphi)V + (\cos \varphi)V' + \varphi'(\cos \varphi)\bar{V} + (\sin \varphi)\bar{V}'.$$

Efectuando el producto interior  $\langle W', \bar{W} \rangle$ , se obtiene

$$\begin{aligned}\langle W', \bar{W} \rangle &= \langle -\varphi'(\sin \varphi)V + (\cos \varphi)V' + \varphi'(\cos \varphi)\bar{V} + (\sin \varphi)\bar{V}', (\cos \varphi)\bar{V} - (\sin \varphi)V \rangle \\ &= \cos^2 \varphi \langle V', \bar{V} \rangle + \varphi' \cos^2 \varphi + \sin \varphi \cos \varphi \langle \bar{V}', \bar{V} \rangle + \varphi' \sin^2 \varphi - \cos \varphi \sin \varphi \langle V', V \rangle - \sin^2 \varphi \langle \bar{V}', V \rangle,\end{aligned}$$

como  $\|V\| = \|\bar{V}\| = 1$ , entonces

$$\langle V', V \rangle = 0; \quad \langle \bar{V}', \bar{V} \rangle = 0,$$

además, como  $\langle V, \bar{V} \rangle = 0$ , entonces

$$\begin{aligned}\langle V' + \bar{V} \rangle + \langle V, \bar{V}' \rangle &= 0 \\ \langle V', \bar{V} \rangle &= -\langle V, \bar{V}' \rangle.\end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned}\langle W', W \rangle &= \varphi' + (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) \langle V', \bar{V} \rangle \\ &= \varphi' + \langle V', \bar{V} \rangle.\end{aligned}$$

Por otra parte, como

$$\begin{aligned}\left[ \frac{DW}{dt} \right] &= \left\langle \frac{dW}{dt}, N \wedge W \right\rangle \\ &= \langle W', \bar{W} \rangle,\end{aligned}$$

entonces

$$\left[ \frac{DW}{dt} \right] = \varphi' + \langle V', \bar{V} \rangle.$$

Así,

$$\begin{aligned}\left[ \frac{DW}{dt} \right] &= \langle W', \bar{W} \rangle = \varphi' + \langle V', \bar{V} \rangle \\ \left[ \frac{DW}{dt} \right] &= \varphi' + \langle V', N \wedge V \rangle \\ \left[ \frac{DW}{dt} \right] &= \frac{d\varphi}{dt} + \left[ \frac{DV}{dt} \right],\end{aligned}$$

de donde se deduce que

$$\left[ \frac{DW}{dt} \right] - \left[ \frac{DV}{dt} \right] = \frac{d\varphi}{dt},$$

con lo que se concluye la demostración del teorema.

**Corolario.** Sean  $C$  una curva regular orientada en  $S$ ,  $\alpha(s)$  una parametrización de  $C$  por la longitud de arco  $s$  en  $p \in S$  y  $V(s)$  un campo vectorial paralelo a lo largo de  $\alpha(s)$ . Si  $W(s) = \alpha'(s)$ , entonces

$$k_g(s) = \left[ \frac{D\alpha'(s)}{ds} \right] = \frac{d\varphi}{ds},$$

donde  $\varphi$  es el ángulo que forma el vector tangente  $\alpha'(s)$  a la curva con una dirección fija, campo vectorial paralelo,  $V(s)$  a lo largo de dicha curva.

### **Demostración**

Como  $V(s)$  es un campo vectorial paralelo a lo largo de  $\alpha$ , entonces

$$\frac{DV}{ds} = 0.$$

Por el teorema anterior,

$$\left[ \frac{DW}{ds} \right] - \left[ \frac{DV}{ds} \right] = \frac{d\varphi}{ds},$$

y al sustituir  $\frac{DV}{ds} = 0$ , se obtiene

$$\begin{aligned} \left[ \frac{D\alpha'(s)}{ds} \right] - [0] &= \frac{d\varphi}{ds} \\ \left[ \frac{D\alpha'(s)}{ds} \right] &= \frac{d\varphi}{ds}. \end{aligned}$$

Como  $\left[ \frac{D\alpha'(s)}{ds} \right] = K_g(s)$ , entonces

$$k_g(s) = \frac{d\varphi}{ds}.$$

El corolario anterior nos muestra, que la curvatura geodésica  $k_g$  de una curva en una superficie se puede interpretar como la tasa de variación del ángulo que forma el campo vectorial tangente a la curva con respecto a una dirección fija a lo largo de la curva. En el caso de una curva plana, la dirección fija corresponde al semieje positivo  $x$ . Así, la curvatura geodésica de una curva en una superficie es lo análogo a la curvatura usual de una curva plana.



## Capítulo 4

# Capítulo 4: Curvatura gaussiana de una superficie versus curvatura escalar en una variedad.

En este capítulo se mostrará de una manera clara que la curvatura escalar en una variedad de dimensión  $n = 2$  es análoga a la curvatura gaussiana de una superficie, y al considerar una superficie regular  $S$  como una variedad de dimensión dos, se observará que la curvatura seccional, la curvatura de Ricci y la curvatura escalar son iguales. Aunque utilizaremos los resultados de curvatura sólo para  $n = 2$ , los expondremos en general, ya que implica la misma dificultad.

### 4.1. Curvatura gaussiana de una superficie regular

En la sección 2.2, se definió la curvatura gaussiana  $K$  de una superficie como el determinante de  $dN_p$ ; es decir,

$$K = \det(dN_p),$$

donde  $dN_p : T_p(S) \rightarrow T_p(S)$  es la diferencial de la aplicación de Gauss en  $p \in S$ .

Ahora, vamos a obtener otra expresión para la curvatura gaussiana  $K$  en términos de

los símbolos de christoffel.

Las expresiones  $x_{uu}$ ,  $x_{uv}$ ,  $x_{vu}$ ,  $x_{vv}$ ,  $N_u$ ,  $N_v$  con respecto a la base  $\{x_u, x_v, N\}$ , únicamente dependen de que se conozcan los coeficientes de la primera y la segunda forma fundamental de  $S$ .

Un procedimiento para obtener relaciones entre estos coeficientes consiste en considerar las expresiones

$$\begin{aligned}(x_{uu})_v - (x_{uv})_u &= 0, \\ (x_{vv})_u - (x_{vu})_v &= 0, \\ N_{uv} - N_{vu} &= 0.\end{aligned}$$

Lo anterior ya que  $x_{uu}$ ,  $x_{uv}$ ,  $x_{vu}$ ,  $x_{vv}$  son continuas con sus derivadas con respecto a  $u$  y  $v$ , respectivamente.

Al introducir las relaciones  $x_{uu}$ ,  $x_{uv}$ ,  $x_{vu}$ ,  $x_{vv}$ ,  $N_u$ ,  $N_v$  en las expresiones anteriores, se pueden escribir

$$\begin{aligned}A_1x_u + B_1x_v + c_1N &= 0, \\ A_2x_u + B_2x_v + c_2N &= 0, \\ A_3x_u + B_3x_v + c_3N &= 0,\end{aligned}$$

donde  $A_i$ ,  $B_i$ ,  $c_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  son funciones de  $E$ ,  $F$ ,  $G$ ,  $e$ ,  $f$ ,  $g$  y de sus derivadas.

Como los vectores  $x_u, x_v, N$  son linealmente independientes, entonces  $A_i = 0$ ,  $B_i = 0$ ,  $C_i = 0$ ,  $i = 1, 2, 3$ .

Veamos el caso  $A_i = 0$ ,  $B_i = 0$ ,  $C_i = 0$ . Sustituyendo las expresiones  $x_{uu}$  y  $x_{uv}$  en la ecuación  $(x_{uu})_v - (x_{uv})_u = 0$  y realizando las derivadas correspondientes, se obtiene

$$\begin{aligned}(\Gamma_{11}^1x_u + \Gamma_{11}^2x_v + L_1N)_v - (\Gamma_{12}^1x_u + \Gamma_{12}^2x_v + L_2N)_u &= 0 \\ (\Gamma_{11}^1)_v x_u + \Gamma_{11}^1 x_{uv} + (\Gamma_{11}^2)_v x_v + \Gamma_{11}^2 x_{vv} + L_{1v}N + L_1N_v &= \\ = (\Gamma_{12}^1)_u x_u + \Gamma_{12}^1 x_{uu} + (\Gamma_{12}^2)_u x_v + \Gamma_{12}^2 x_{vu} + L_{2u}N + L_2N_u\end{aligned}$$



Como  $L_1 = e$ ,  $L_2 = \overline{L_2} = f$ ,  $L_3 = g$ , entonces

$$\begin{aligned} & \Gamma_{11}^1 x_{uv} + \Gamma_{11}^2 x_{vv} + eN_v + (\Gamma_{11}^1)_v x_u + (\Gamma_{11}^2)_v x_v + e_v N = \\ & = \Gamma_{12}^1 x_{uu} + \Gamma_{12}^2 x_{vu} + fN_u + (\Gamma_{12}^1)_u x_u + (\Gamma_{12}^2)_u x_v + f_u N. \end{aligned}$$

Sustituyendo  $x_{uu}, x_{uv}$ , se obtiene

$$\begin{aligned} & \Gamma_{11}^1 (\Gamma_{12}^1 x_u + \Gamma_{12}^2 x_v + fN) + \Gamma_{11}^2 (\Gamma_{22}^1 x_u + \Gamma_{22}^2 x_v + gN) + eN_v + (\Gamma_{11}^1)_v x_u + (\Gamma_{11}^2)_v x_v + e_v N = \\ & = \Gamma_{12}^1 (\Gamma_{11}^1 x_u + \Gamma_{11}^2 x_v + eN) + \Gamma_{12}^2 (\Gamma_{21}^1 x_u + \Gamma_{21}^2 x_v + fN) + fN_u + (\Gamma_{12}^1)_u x_u + (\Gamma_{12}^2)_u x_v + f_u N \end{aligned}$$

Igualando los coeficientes de  $x_v$ , tenemos

$$\begin{aligned} & \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 + ea_{22} + (\Gamma_{11}^2)_v = \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{21}^2 + fa_{21} + (\Gamma_{12}^2)_u \\ & (\Gamma_{12}^2)_u - (\Gamma_{11}^2)_v + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{21}^2 - \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 - \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 = ea_{22} - fa_{21}. \end{aligned}$$

Como  $a_{21} = \frac{ef - fE}{EG - F^2}$ ,  $a_{22} = \frac{fF - gE}{EG - F^2}$ , entonces

$$\begin{aligned} ea_{22} - fa_{21} &= e \left( \frac{fF - gE}{EG - F^2} \right) - f \left( \frac{ef - fE}{EG - F^2} \right) \\ &= \frac{efF - egE - efF + F^2 E}{EG - F^2} \\ &= -E \left( \frac{eg - f^2}{EG - F^2} \right) \\ &= -EK; \text{ ya que } K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}, \end{aligned}$$

donde  $K$  es la curvatura gaussiana. Así,

$$(\Gamma_{12}^2)_u - (\Gamma_{11}^2)_v + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{21}^2 - \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 - \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 = -EK.$$

Finalmente,

$$K = -\frac{1}{E} [(\Gamma_{12}^2)_u - (\Gamma_{11}^2)_v + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{21}^2 - \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 - \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2]$$

## 4.2. Curvatura en variedades

Ya hemos visto que, una curva en  $\mathbb{R}^2$  está muy curvada si su vector normal o tangente presenta grandes variaciones. En una superficie regular  $S$  inmersa en  $\mathbb{R}^3$  hay muchas direcciones en las que estudiar las variaciones del vector normal alrededor de un punto. Gracias a C.F Gauss, quien introduce la aplicación de Gauss  $N : S \rightarrow S^2$ , que asigna a cada punto  $p \in S$  un vector normal unitario  $N(p)$  e identificando los planos tangentes paralelos  $T_p(S)$  y  $T_{N(p)}(S^2)$ , entre los cuales se puede considerar la aplicación diferencial  $dN : T_p(S) \rightarrow T_{N(p)}(S^2)$ , cuyo determinante mide la variación de área. La curvatura gaussiana de una superficie regular en  $p \in S$ , se define como  $K(p) = \det(dN_p)$ .

Gauss, al introducir el concepto de curvatura gaussiana de una superficie, prueba el hecho de que  $K(p)$  es intrínseca, depende sólo de la métrica de la superficie; es decir, es posible medir  $K(p)$ , desde adentro, sin importar el espacio en que está inmersa la superficie.

Con este resultado Riemann adapta a variedades la definición de curvatura de Gauss y considera la curvatura  $K(p, \sigma)$ , llamada la curvatura seccional de  $M$  en  $p$  con respecto a  $\sigma$ , donde  $p$  es un punto de una variedad Riemanniana  $M$  y  $\sigma \subset T_p M$  un subespacio bidimensional del espacio tangente  $T_p M$  de  $M$  en  $p$ .

Riemann no indica un método para calcular la curvatura seccional a partir de la métrica de  $M$ , esta fue realizada pocos años después por Christoffel. El trabajo de Riemann contiene sólo una fórmula; es decir, una expresión para la medición de  $K(p, \sigma)$  que es constante, para todo  $p$  y  $\sigma$ . Como sucede frecuentemente en matemáticas una «posible» formulación del concepto de curvatura requiere un largo tiempo para su desarrollo. Cuando finalmente apareció una formulación para la curvatura tenía la ventaja de ser fácil de utilizar, para probar teoremas, pero tenía la desventaja de ser tan alejada del concepto intuitivo inicial de curvatura que parece como si fuera una especie de

creación arbitraria. Más adelante veremos que a pesar de esta apariencia, esta curvatura corresponde a la curvatura gaussiana de una superficie.

**4.2.1 Definición.** La curvatura  $R$  de una variedad riemanniana  $M$  es una correspondencia que asocia a cada par  $X, Y \in \chi(M)$  una aplicación  $R(X, Y) : \chi(M) \rightarrow \chi(M)$  dada por

$$R(X, Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X, Y]} Z, \quad Z \in \chi(M),$$

donde  $\nabla$  es la conexión riemanniana de  $M$ .

Observe que si  $M = R^n$ , entonces  $R(X, Y)Z = 0$  para todo  $X, Y, Z \in \chi(R^n)$ . En efecto, si el campo vectorial  $Z$  es dado por  $Z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$ , con las componentes de  $Z$  vienen de las coordenadas naturales de  $R^n$ , obtenemos

$$\nabla_X Z = (X_{z_1}, \dots, X_{z_n}),$$

luego

$$\nabla_Y \nabla_X Z = (Y X_{z_1}, \dots, Y X_{z_n}),$$

lo cual implica que

$$R(X, Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X, Y]} Z = 0,$$

como se ha expresado. Por lo tanto, se puede pensar en  $R$  como una manera de medir cuanto  $M$  se aparta de ser euclidiano.

Otra forma de ver la definición anterior es considerar un sistema de coordenadas  $\{x_i\}$  alrededor de  $p \in M$ . Como  $\left[ \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right] = 0$ , obtenemos

$$R\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right) \frac{\partial}{\partial x_k} = \left( \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} - \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \right) \frac{\partial}{\partial x_k},$$

es decir, la curvatura mide la no conmutatividad de la derivada covariante.

**4.2.2 Teorema.** La curvatura  $R$  de una variedad riemanniana satisface las siguientes propiedades:

i)  $R$  es bilineal en  $\chi(M) \times \chi(M)$ ; es decir,

$$\begin{aligned} R(fX_1 + gX_2, Y_1) &= fR(X_1, Y_1) + gR(X_2, Y_1), \\ R(X_1, fY_1 + gY_2) &= fR(X_1, Y_1) + gR(X_1, Y_2), \end{aligned}$$

$$f, g \in \mathcal{D}(M), X_1, X_2, Y_1, Y_2 \in \chi(M).$$

ii) Para cualquier  $X, Y \in \chi(M)$ , el operador curvatura  $R(X, Y) : \chi(M) \rightarrow \chi(M)$  es lineal, es decir,

$$\begin{aligned} R(X, Y)(Z + W) &= R(X, Y)Z + R(X, Y)W; \\ R(X, Y)fZ &= fR(X, Y)Z, \end{aligned}$$

$$f \in \mathcal{D}(M), Z, W \in \chi(M). \text{ (ver demostración en [9]).}$$

**observación.** Para simplificar la notación se puede escribir  $\langle R(X, Y)Z, T \rangle = (X, Y, Z, T)$

**4.2.3 Teorema.** a)  $(X, Y, Z, T) + (Y, Z, X, T) + (Z, X, Y, T) = 0$ .

$$\text{b) } (X, Y, Z, T) = -(Y, X, Z, T).$$

$$\text{c) } (X, Y, Z, T) = -(X, Y, T, Z).$$

$$\text{d) } (X, Y, Z, T) = (Z, T, X, Y).$$

(ver demostración en [9])

Es conveniente expresar a  $R\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right) \frac{\partial}{\partial x_k}$  como

$$R(x_i, x_j) x_k = R_{ijk}^l x_l,$$

donde  $R_{ijk}^l$  son las componentes del operador curvatura  $R$  en el sistema de coordenadas  $(U, x)$  alrededor de un punto  $p \in M$ .

Si  $X = \sum_i u^i X_i$ ,  $Y = \sum_j v^j X_j$ ,  $Z = \sum_k w^k X_k$ , por ser  $X, Y, Z$  campos vectoriales, se obtiene, por la linealidad de  $R$ ,

$$R(X, Y) Z = \sum_{i,j,k,l} R_{ijk}^l u^i v^j w^k X_l.$$

Como  $\nabla_{X_i} X_j = \sum_k \Gamma_{ij}^k X_k$ , entonces la expresión  $R_{ijk}^l$  se puede escribir en terminos de los coeficientes  $\Gamma_{ij}^k$  (símbolos de Christoffel) de la conexión Riemanniana, así

$$\begin{aligned} R(X_i, X_j) X_k &= \nabla_{X_j} \nabla_{X_i} X_k - \nabla_{X_i} \nabla_{X_j} X_k \\ &= \nabla_{X_j} \left( \sum_l \Gamma_{ik}^l X_l \right) - \nabla_{X_i} \left( \sum_l \Gamma_{jk}^l X_l \right). \end{aligned}$$

Aplicando propiedad de la conexión y realizando el cálculo, se obtiene

$$R_{ijk}^s = \sum_l \Gamma_{ik}^l \Gamma_{jl}^s - \sum_l \Gamma_{jk}^l \Gamma_{il}^s + \frac{\partial}{\partial x_j} \Gamma_{ik}^s - \frac{\partial}{\partial x_i} \Gamma_{jk}^s.$$

**4.2.4 Definición.** Dado un punto  $p \in M$  y un subespacio  $\sigma \subset T_p M$  bidimensional, el número real

$$K(x, y) = \frac{(x, y, x, y)}{\|x \wedge y\|^2} = K(\sigma),$$

donde  $\{x, y\}$  es una base de  $\sigma$ , es llamada la curvatura seccional de  $\sigma$  en  $p$ .

### 4.2.1. Curvatura de Ricci y curvatura escalar

Ciertas combinaciones de curvatura seccional aparecen con tanta frecuencia que merecen nombres especiales.

Sea  $x = z_n$  un vector unitario en  $T_p M$ ; consideremos una base ortonormal  $\{z_1, z_2, \dots, z_{n-1}\}$  de los hiperplanos en  $T_p M$  ortogonal a  $x$ , se definen las curvaturas de Ricci y escalar, respectivamente como

$$Ric_p(x) = \frac{1}{n-1} \sum_i \langle R(x, z_i)x, z_i \rangle, i = 1, 2, \dots, n-1,$$

$$K(p) = \frac{1}{n} \sum_j Ric_p(z_j) = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{ij} \langle R(z_i, z_j)z_i, z_j \rangle, j = 1, \dots, n;$$

donde  $Ric_p(x)$  es la curvatura de Ricci en la dirección  $x$  y  $K(p)$  es la curvatura escalar de  $M$  en  $p$ .

Veamos cual es la curvatura seccional de una variedad diferenciable  $M$ , que es una superficie en  $\mathbb{R}^3$  de dimensión dos. Sea  $M$  una superficie en  $\mathbb{R}^3$  una variedad diferenciable de dimensión dos y  $x : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  una parametrización diferenciable de  $M$ . Supongamos  $\{x_u, x_v\} = \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \right\}$ ,  $i = 1, 2$  ( $u = 1, v = 2$ ) es una base ortonormal de  $T_p(M)$ .

La curvatura seccional de  $M$  está dada por

$$K \left( \frac{\partial}{\partial x_u}, \frac{\partial}{\partial x_v} \right) = \frac{\left( \frac{\partial}{\partial x_u}, \frac{\partial}{\partial x_v}, \frac{\partial}{\partial x_u}, \frac{\partial}{\partial x_v} \right)}{\left\| \frac{\partial}{\partial x_u} \wedge \frac{\partial}{\partial x_v} \right\|},$$

donde  $\left( \frac{\partial}{\partial x_u}, \frac{\partial}{\partial x_v}, \frac{\partial}{\partial x_u}, \frac{\partial}{\partial x_v} \right) = \left\langle R \left( \frac{\partial}{\partial x_u}, \frac{\partial}{\partial x_v} \right) \frac{\partial}{\partial x_u}, \frac{\partial}{\partial x_v} \right\rangle$ , siendo  $R$  el operador curvatura de una variedad riemanniana  $M$ .

Como  $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_u}, \frac{\partial}{\partial x_v} \right\}$  es una base ortonormal, entonces  $\left\| \frac{\partial}{\partial x_u} \wedge \frac{\partial}{\partial x_v} \right\| = 1$ , luego

$$\begin{aligned}
K\left(\frac{\partial}{\partial x_u}, \frac{\partial}{\partial x_v}\right) &= \left(\frac{\partial}{\partial x_u}, \frac{\partial}{\partial x_v}, \frac{\partial}{\partial x_u}, \frac{\partial}{\partial x_v}\right) \\
&= \left\langle R\left(\frac{\partial}{\partial x_u}, \frac{\partial}{\partial x_v}\right) \frac{\partial}{\partial x_u}, \frac{\partial}{\partial x_v} \right\rangle.
\end{aligned}$$

En un sistema de coordenadas  $(U, X)$  en el punto  $p \in M$ , es conveniente escribir

$$R\left(\frac{\partial}{\partial x_u}, \frac{\partial}{\partial x_v}\right) \frac{\partial}{\partial x_u} = \sum_{k=1}^2 R_{uvu}^k \frac{\partial}{\partial x_k} = R_{uvu}^u \frac{\partial}{\partial x_u} + R_{uvu}^v \frac{\partial}{\partial x_v},$$

donde  $R_{uvu}^k$  son las componentes del operador curvatura  $R$  en  $(U, x)$ .

La expresión  $R_{uvu}^s$  en términos de los coeficientes de christoffel  $\Gamma_{ij}^k$  (o coeficientes de la conexión riemanniana), está dada por (ver [9])

$$R_{uvu}^s = \sum_{l=1}^2 \Gamma_{uu}^l \Gamma_{vl}^s - \sum_{l=1}^2 \Gamma_{vu}^l \Gamma_{ul}^s + \frac{\partial}{\partial x_v} \Gamma_{uu}^s - \frac{\partial}{\partial x_u} \Gamma_{vu}^s.$$

Ahora, podemos escribir

$$K\left(\frac{\partial}{\partial x_u}, \frac{\partial}{\partial x_v}\right) = \left\langle R_{uvu}^u \frac{\partial}{\partial x_u} + R_{uvu}^v \frac{\partial}{\partial x_v}, \frac{\partial}{\partial x_v} \right\rangle,$$

realizando el producto interior, se tiene

$$K\left(\frac{\partial}{\partial x_u}, \frac{\partial}{\partial x_v}\right) = R_{uvu}^u \left\langle \frac{\partial}{\partial x_u}, \frac{\partial}{\partial x_v} \right\rangle + R_{uvu}^v \left\langle \frac{\partial}{\partial x_v}, \frac{\partial}{\partial x_v} \right\rangle.$$

Como  $\left\langle \frac{\partial}{\partial x_u}, \frac{\partial}{\partial x_v} \right\rangle = 0$  y  $\left\langle \frac{\partial}{\partial x_v}, \frac{\partial}{\partial x_v} \right\rangle = 1$ , entonces

$$K\left(\frac{\partial}{\partial x_u}, \frac{\partial}{\partial x_v}\right) = R_{uvu}^v.$$

Aplicando la expresión anterior  $R_{uvu}^s$  y haciendo  $s = 2$ ,  $u = 1$ ,  $v = 2$  y  $l = 1, 2$ , se

obtiene

$$K \left( \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2} \right) = \Gamma_{11}^1 \Gamma_{21}^2 + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 - \Gamma_{21}^1 \Gamma_{11}^2 - \Gamma_{21}^2 \Gamma_{12}^2 + \frac{\partial}{\partial x_2} \Gamma_{11}^2 - \frac{\partial}{\partial x_1} \Gamma_{21}^2.$$

Así, la curvatura seccional en  $p \in M$  está dada por

$$K(x_u, x_v) = \Gamma_{11}^1 \Gamma_{21}^2 + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 - \Gamma_{21}^1 \Gamma_{11}^2 - \Gamma_{21}^2 \Gamma_{12}^2 + \frac{\partial}{\partial x_2} \Gamma_{11}^2 - \frac{\partial}{\partial x_1} \Gamma_{21}^2.$$

Como  $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$ ,  $E = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_u}, \frac{\partial}{\partial x_v} \right\rangle = 1$ ,  $\frac{\partial}{\partial x_2} \Gamma_{11}^2 = (\Gamma_{11}^2)_v$  y  $\frac{\partial}{\partial x_1} \Gamma_{21}^2 = (\Gamma_{21}^2)_u$ , entonces la curvatura  $K(x_u, x_v)$  se puede expresar de la siguiente manera

$$K(x_u, x_v) = -\frac{1}{E} [(\Gamma_{12}^2)_u - (\Gamma_{11}^2)_v + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{21}^2 - \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 - \Gamma_{11}^1 \Gamma_{22}^2],$$

de donde se puede concluir

$$K \left( \frac{\partial}{\partial x_u}, \frac{\partial}{\partial x_v} \right) = K,$$

siendo  $K$  la curvatura gaussiana obtenida en la sección anterior.

Así, la curvatura seccional en una variedad  $M$ , superficie en  $\mathbb{R}^3$ ,  $K \left( \frac{\partial}{\partial x_u}, \frac{\partial}{\partial x_v} \right)$  es igual a la curvatura gaussiana  $K$  de una superficie.

Ahora, se quiere determinar la curvatura de Ricci en una variedad diferenciable  $M$  de dimensión dos, superficie en  $\mathbb{R}^3$ .

De la expresión

$$Ric_p(x) = \frac{1}{n-1} \sum_i \langle R(x, z_i) x, z_i \rangle, \quad i = 1, 2, \dots, n-1,$$

con  $n=2$ , se obtiene

$$Ric_p(x_u) = \frac{1}{2-1} \langle R(x_u, x_v) x_u, x_v \rangle$$



donde  $x_v \in T_p M$  ortogonal a  $x_u$ .

Como  $\langle R(x_u, x_v)x_u, x_v \rangle = K(x_u, x_v) = K$ ,

donde  $K$  es la curvatura gaussiana de  $S$  en  $p$ . Entonces

$$Ric_p(x_u) = K,$$

donde  $Ric_p(x_u)$  es la curvatura de Ricci en  $p \in M$  en la dirección  $x_u$ .

Veamos el valor de la curvatura de Ricci en  $p \in M$ , pero ahora en la dirección  $x_v$ .

Luego,

$$Ric_p(x_v) = \frac{1}{2-1} \langle R(x_v, x_u)x_v, x_u \rangle,$$

donde  $x_u \in T_p M$  ortogonal a  $x_v$ .

Aplicando el teorema 4.2.3, se tiene

$$\begin{aligned} \langle R(x_v, x_u)x_v, x_u \rangle &= (x_v, x_u, x_v, x_u) \\ &= -(x_u, x_v, x_v, x_u) \\ &= -[-(x_u, x_v, x_u, x_v)] \\ &= (x_u, x_v, x_u, x_v) \\ &= \langle R(x_u, x_v)x_u, x_v \rangle. \end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned} Ric_p(x_v) &= \frac{1}{2-1} \langle R(x_u, x_v)x_u, x_v \rangle \\ Ric_p(x_v) &= K. \end{aligned}$$

Luego, la curvatura de Ricci en  $p \in M$  en la dirección  $x_v$  es igual a la curvatura gaussiana  $K$  de una superficie.

Se quiere determinar la curvatura escalar de  $M$  en  $p$ . La expresión para la curvatura escalar de una variedad  $M$  en  $p$  está dada por

$$K(p) = \frac{1}{n} \sum_j Ric_p(z_j) = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{ij} \langle R(z_i, z_j)z_i, z_j \rangle, \quad j = 1, \dots, n.$$

Como  $n=2$ , entonces

$$K(p) = \frac{1}{n} [Ric_p(x_u) + Ric_p(x_v)].$$

Por otra parte. Como  $Ric_p(x_u) = K$  y  $Ric_p(x_v) = K$ , entonces

$$\begin{aligned} K(p) &= \frac{1}{2} [K + K] \\ &= \frac{1}{2} [2K] \\ K(p) &= K, \end{aligned}$$

donde  $K$  es la curvatura gaussiana de  $S$  en  $p$ . Finalmente, se puede observar que  $K(p) = K$ ; es decir, la curvatura escalar  $K(p)$  de  $M$  en  $p$  es igual a la curvatura gaussiana  $K$  de  $S$  en  $p$ .





# Conclusiones

- La curvatura de una curva plana se puede definir como la rapidez con que varía el ángulo que forma el campo vectorial tangente unitario con respecto a una dirección fija (semieje positivo  $x$ ); es decir,

$$k = |\theta'(s)|.$$

- En una curva plana para determinar el valor numérico asociado a la curvatura, basta con hallar la norma del vector curvatura; es decir,  $k = \left\| \frac{dN}{ds} \right\|$ ; mientras que en una superficie al hallar la diferencial de la aplicación de Gauss  $dN_p$ , resulta una matriz, a la cual se le halla el determinante, y este valor numérico corresponde a la curvatura gaussiana  $K = \det(dN_p)$  de  $S$  en  $p$ .
- La curvatura geodésica  $k_g$  de una curva en una superficie se puede interpretar como la tasa de variación del ángulo  $\varphi$  que forma el campo vectorial tangente unitario a la curva con respecto a una dirección fija a lo largo de la curva (campo vectorial paralelo); es decir,  $k_g(s) = \frac{d\varphi}{ds}$ . En el caso de una curva plana, la dirección fija corresponde al semieje positivo  $x$ ,  $k = |\theta'(s)|$ . Así, la curvatura geodésica de una curva en una superficie es lo análogo a la curvatura de una curva plana.
- La curvatura seccional de una variedad diferenciable  $M$  de dimensión dos, superficie en  $\mathbb{R}^3$ ,  $K \left( \frac{\partial}{\partial x_u}, \frac{\partial}{\partial x_v} \right)$  es igual a la curvatura gaussiana  $K$  de una superficie
- La curvatura escalar  $K(p)$  de una variedad diferenciable  $M$  de dimensión dos, superficie en  $\mathbb{R}^3$ , es igual a la curvatura gaussiana  $K$  de  $S$  en  $p$ .



# Bibliografía

- [1] A. Reventos and C.A. Escudero, An interesting property of the evolute, The American Mathematical Monthly. Vol 114, 2007, 623-627.
- [2] C.A. Escudero, Curvatura en un polígono y teorema de Ros para curvas planas, Universidad del Valle, Colombia 1996, Tesis.
- [3] E. Gallego, A. Reventos, G. Solanes, and E. Teufel, Width of convex bodies in spaces of constant curvature, preprint 34 departamento de matemáticas, UAB, 2005, 1-15.
- [4] M. Do Carmo, Differential Geometry of Curves and Surface, Prentice Hall, 1976.
- [5] R. Osserman, Curvature in the Eighties, The Monthly, Vol 97, 1990, 731-756.
- [6] S. Montiel, A. Ros, Curves and Surface, American Mathematical Society, Vol 69, 2<sup>a</sup> Edition, 2009.
- [7] C.A. Escudero, A. Reventos and G. Solares, Focal sets in two-dimensional space forms. Pacific Journal of Mathematics, vol 233, 2007, 309-320.
- [8] Luis J. Alías Linares, El significado geométrico de la curvatura: superficies de curvatura media constante. Fundación Séneca. 1<sup>a</sup> edición, Murcia 2004.
- [9] M. Do Carmo, Riemannian Geometry. Birkhäuser Boston. 2<sup>nd</sup> edition, 1993.
- [10] [http://www.um.es/docencia/jpastor/miweb\\_files/ficheros/griemann/manual.pdf](http://www.um.es/docencia/jpastor/miweb_files/ficheros/griemann/manual.pdf)

- [11] [http://www.uam.es/personal\\_pdi/ciencias/fchamizo/asignaturas/mgeom1112/mgeom\\_4.pdf](http://www.uam.es/personal_pdi/ciencias/fchamizo/asignaturas/mgeom1112/mgeom_4.pdf)
- [12] <http://www.aq.upm.es/Departamentos/Matematicas/erosado/ApuntesCurvas.pdf>
- [13] <http://mimosa.pntic.mec.es/jgomez53/matema/docums/lafuente-geometria.pdf>
- [14] <http://www.bibliotecadigital.ufrgs.br/da.php?nrb=000624581&loc=2008&l=910668b54a51e28f>
- [15] [http://www.uam.es/personal\\_pdi/ciencias/gallardo/resumen\\_curvas\\_2005\\_2006.pdf](http://www.uam.es/personal_pdi/ciencias/gallardo/resumen_curvas_2005_2006.pdf)
- [16] [http://www.ifug.ugto.mx/delepine/geometria\\_diferencial.pdf](http://www.ifug.ugto.mx/delepine/geometria_diferencial.pdf)